

Quotients de mortalité prospectifs

par sexe et unisexes

Décembre 2009

Prospectieve sterftequotiënten

per geslacht en uniseks

December 2009

Jean-Marc Paul, jmp@plan.be

Abstract - La première partie de cette étude propose une révision de la méthode générale de construction des quotients de mortalité prospectifs pour les grands âges présentée dans le WP n° 20 de 2004. Une attention particulière a été apportée à la sensibilité des résultats aux paramètres les plus importants. Une projection par sexe incorporant les nouvelles observations pour les années 2002 à 2007 est ensuite présentée.

La seconde partie développe une méthode de calcul des quotients de mortalité prospectifs *unisexes* basée sur une répartition théorique de la population. Les résultats de la projection unisexe résultant de cette nouvelle méthode sont présentés et comparés à ceux obtenus par la méthode classique.

Acknowledgements - L'auteur remercie Geert Bryon, Johan Duyck et Micheline Lambrecht du Bureau fédéral du Plan pour leur aide précieuse et leur implication pendant tout le processus d'élaboration de ce travail. Il remercie également les personnes suivantes pour leurs commentaires : M. Erik Degadt et Mme Marleen Tombeur de la CBFA, M. Michel Denuit de l'UCL, M. Philippe Delfosse de l'ARAB et M. Michel Willems de la DG SIE.

Abstract - Het eerste deel van deze studie omvat een herziening van de algemene methode voor de opmaak van de prospectieve sterftequotiënten voor de hoge leeftijden, zoals voorgesteld in WP20 van 2004. Bijzondere aandacht werd besteed aan de gevoeligheid van de resultaten voor de belangrijkste parameters. Daarna volgt een projectie per geslacht waarin de nieuwe waarnemingen voor de jaren 2002 tot 2007 zijn opgenomen.

In het tweede deel wordt een berekeningsmethode voor de *uniseks* prospectieve sterftequotiënten ontwikkeld die gebaseerd is op een theoretische opdeling van de bevolking naar geslacht. De resultaten van de uniseks projectie die voortvloeien uit die nieuwe methode worden voorgesteld en vergeleken met de resultaten van de klassieke methode.

Acknowledgements - De auteur dankt Geert Bryon, Johan Duyck en Micheline Lambrecht van het Federaal Planbureau voor hun waardevolle hulp en hun inzet tijdens het tot stand brengen van dit werk. Hij dankt ook de volgende personen voor hun commentaar: de heer Erik Degadt en mevr. Marleen Tombeur van de CBFA, M. Michel Denuit van de UCL, de heer Philippe Delfosse van het ARAB en de heer Michel Willems van de AD SEI.

Jel Classification - J11

Keywords - Démographie, tables de mortalité, quotients de mortalité prospectifs, espérance de vie, espérance de vie générationnelle

Executive Summary

La loi du 28 avril 2003 relative aux pensions complémentaires et au régime fiscal de celles-ci et de certains avantages complémentaires en matière de sécurité sociale (M.B. du 15.05.2003, erratum au M.B. du 16.05.2003) prévoit dans ses arrêtés royaux d'exécution (M.B. du 14.11.2003) que « ... les règles d'actualisation utilisées [pour la conversion d'un capital en rente] ne peuvent conduire à un résultat inférieur à celui que l'on obtiendrait au moyen des tables de mortalité belges prospectives telles qu'établies par la CBFA sur base des dernières études démographiques effectuées par l'Institut national de Statistique et le Bureau fédéral du Plan. ».

Suite à cette obligation légale, des quotients de mortalité prospectifs ont été publiés en 2004. Depuis lors, les observations se sont enrichies de six années supplémentaires. D'autre part, la nécessité de projeter les quotients de mortalité non seulement par sexe mais également pour les deux sexes regroupés (« unisexes ») est apparue. Ces deux éléments sont à l'origine cette étude.

Nouvelle méthode de projection des quotients de mortalité pour les grands âges

Le modèle utilisé dans l'exercice de 2004¹ était composé de deux parties, l'une pour les âges pour lesquelles une tendance claire se dessine dans les observations, l'autre pour les âges supérieurs, aux observations peu nombreuses et à évolution plus erratique. L'application de ce modèle aux données nouvelles a permis de constater que les quotients de mortalité pouvaient, à certains âges très élevés, recommencer à croître dans le temps, ce qui est contraire au modèle exponentiel de base, lequel exige une décroissance ou à tout le moins une valeur constante dans le temps pour les quotients de mortalité de chaque âge. La méthode pour les grands âges a donc été revue afin de respecter le modèle exponentiel de base tout en conservant un scénario de quasi-stabilité des quotients de mortalité aux âges très élevés.

Il faut cependant remarquer que la croissance des quotients de mortalité aux grands âges semble devenir une réalité : une simple analyse de tendance le montre clairement. Il y aura donc lieu de tenter, dans une étude future, de modéliser cette tendance si elle se confirme.

Sensibilité des résultats aux nouvelles observations et aux paramètres

La nouvelle méthode de calcul des coefficients de mortalité prospectifs est ensuite appliquée aux observations disponibles et la sensibilité des résultats aux nouvelles observations et à divers paramètres est analysée en termes d'espérances de vie générationnelles.

Cette analyse montre *une évolution différente entre les quotients de mortalité prospectifs de chaque sexe depuis l'étude de 2004*. Si l'espérance de vie générationnelle des hommes change très peu suite à l'ajout des nouvelles observations, celle des femmes y est nettement plus sensible : on obtient *une diminution de près d'une année de l'espérance de vie générationnelle des femmes en 2050 simplement*

¹ Bureau fédéral du Plan : Working Paper 20-04 « Quotients de mortalité prospectifs », 2004

en intégrant les observations de 2002 à 2007. On observe également que cette diminution d'espérance de vie se concentre presque exclusivement sur les grands âges. Le même constat peut être fait pour le choix d'un autre paramètre, à savoir le plus grand âge pour lequel la projection de la mortalité tient compte des données observées pour cet âge : plus celui-ci est élevé, plus l'espérance de vie générationnelle diminue, pouvant aller jusqu'à plusieurs années de différence en 2050 pour les femmes.

L'explication se trouve sans doute dans le *ralentissement en fin de période de la décroissance des quotients de mortalité aux très grands âges, voire de leur croissance.* Plus l'estimation prend en compte les âges élevés et les données récentes, plus ce ralentissement se fait sentir dans les résultats des projections.

Quotients de mortalité unisexes

L'application de la méthode classique aux données unisexes ne donne pas des résultats acceptables à très long terme : la courbe estimée des espérances de vie générationnelles unisexes se rapproche, voire dépasse celle des femmes. Une méthode de calcul des quotients de mortalité prospectifs unisexes a donc été développée pour attaquer ce problème spécifique. On démontre d'abord que les quotients de mortalité unisexes sont la moyenne pondérée de ceux de chaque sexe. On procède ensuite à la construction de populations théoriques pour chaque sexe pour obtenir les pondérations nécessaires aux projections des quotients unisexes.

Les résultats de la projection « unisexe » résultant de cette nouvelle méthode sont présentés et comparés à ceux obtenus par la méthode classique.

Nouvelles tables de quotients de mortalité prospectifs

Les résultats obtenus en appliquant les nouvelles méthodes sur les données les plus récentes sont publiés *in extenso* sur le site web du Bureau fédéral du Plan. Ils peuvent être consultés et téléchargés à l'adresse <http://demo.plan.be>.

Executive Summary

De wet van 28 april 2003 betreffende de aanvullende pensioenen en het belastingstelsel van die pensioenen en van sommige aanvullende voordelen inzake sociale zekerheid (BS van 15.05.2003, erratum in het BS van 16.05.2003) bepaalt in de koninklijke uitvoeringsbesluiten (BS van 14.11.2003) dat *'de gebruikte actualisatieregels [voor de omzetting van een kapitaal in rente] geen resultaat mogen opleveren dat kleiner is dan het resultaat dat men zou verkrijgen met de Belgische prospectieve sterftetafels die worden vastgesteld door de CBFA op basis van de laatste demografische studies uitgevoerd door het Nationaal Instituut voor de Statistiek en het Federaal Planbureau'*.

Als gevolg van die wettelijke verplichting, werden in 2004 prospectieve sterftequotiënten gepubliceerd. Sindsdien zijn de waarnemingen uitgebreid met zes bijkomende jaren. Bovendien bleek het noodzakelijk om de sterftequotiënten niet enkel volgens geslacht, maar ook voor de beide geslachten samen ('uniseks') te projecteren. Die twee elementen liggen aan de basis van deze studie.

Nieuwe projectiemethode voor de sterftequotiënten voor de hoge leeftijden

Het model uit de oefening van 2004² bestond uit twee delen. Het ene deel had betrekking op de leeftijden waarvoor een duidelijke trend kan worden waargenomen, het andere op de hogere leeftijden, met weinig waarnemingen en meer onregelmatige gegevens. Door dit model toe te passen op de nieuwe gegevens, hebben we vastgesteld dat de sterftequotiënten op sommige hoge leeftijden opnieuw kunnen stijgen in de tijd, wat strijdig is met het exponentieel basismodel. Dat model vereist een daling of tenminste een constante waarde in de tijd voor de sterftequotiënten op elke leeftijd. De methode voor de hoge leeftijden werd dus herzien om rekening te houden met het exponentieel basismodel en toch een quasi-stabiliteit te behouden van de sterftequotiënten op zeer hoge leeftijd.

Merk echter op dat de groei van de sterfecijfers op hoge leeftijd een realiteit lijkt te worden: een eenvoudige analyse van de trend toont dit duidelijk. In een latere studie zal die trend, indien hij wordt bevestigd, gemodelleerd moeten worden.

Gevoeligheid van de resultaten voor de nieuwe waarnemingen en de parameters

De nieuwe berekeningsmethode van de prospectieve sterftequotiënten wordt vervolgens toegepast op de beschikbare waarnemingen. De gevoeligheid van de resultaten voor de nieuwe waarnemingen en voor diverse parameters wordt onderzocht in termen van generationele levensverwachting.

² Federaal Planbureau : Working Paper 20-04 "Prospectieve sterftequotiënten", 2004.

De analyse toont een *verschillende evolutie tussen de prospectieve sterftequotiënten per geslacht sinds de studie van 2004*. De generationele levensverwachting van de mannen verandert heel weinig na toevoeging van de nieuwe waarnemingen, terwijl die van de vrouwen er duidelijk veel gevoeliger voor is: *de generationele levensverwachting van de vrouwen daalt met bijna een jaar in 2050 indien rekening wordt gehouden met de waarnemingen van 2002 tot 2007*. Men stelt eveneens vast dat die daling van de levensverwachting vrijwel uitsluitend betrekking heeft op de hoge leeftijden. Dezelfde vaststelling kan worden gemaakt voor de keuze van een andere parameter, namelijk de hoogste leeftijd waarvoor de projectie van de sterftequotiënten rekening houdt met de voor deze leeftijd waargenomen gegevens : hoe hoger die leeftijd, hoe meer de generationele levensverwachting daalt, wat voor de vrouwen een verschil van meerdere jaren kan betekenen in 2050.

De verklaring moet wellicht worden gezocht *in de vertraging op het einde van de periode van de daling van de sterftequotiënten op zeer hoge leeftijd, of zelfs van de groei*. Hoe meer de raming rekening houdt met de hoge leeftijden en de recente gegevens, hoe meer die vertraging zich laat voelen in de resultaten van de projectie.

Uniseks sterftequotiënten

De toepassing van de klassieke methode op de uniseks gegevens geeft geen aanvaardbare resultaten op zeer lange termijn: de geraamde curve van de uniseks generationele levensverwachting benadert en overstijgt zelfs die van de vrouwen. Om dit specifieke probleem aan te pakken, werd dus een berekeningsmethode voor de uniseks prospectieve sterftequotiënten ontwikkeld. Men toont eerst aan dat de uniseks sterftequotiënten het gewogen gemiddelde zijn van de sterftequotiënten van elk geslacht. Vervolgens creëert men theoretische populaties voor elk geslacht om de wegingen te krijgen die nodig zijn voor de projectie van uniseks quotiënten.

De resultaten van de uniseks projectie die voortvloeien uit die nieuwe methode worden voorgesteld en vergeleken met de resultaten van de klassieke methode.

Nieuwe prospectieve sterftetafels

De resultaten die werden verkregen door de nieuwe methodes toe te passen op de meer recente gegevens, worden *in extenso* gepubliceerd op de website van het Federaal Planbureau. Zij kunnen worden geraadpleegd en gedownload op <http://demo.plan.be>.

Table des matières

1. Méthode générale de projection des quotients de mortalité	1
1.1. Principe de base	1
1.2. Notations	1
1.3. Lissage des séries	1
1.4. Modélisation des $q_{x,t}$ prospectifs : méthode wp0420	2
1.4.1. Méthode 1 pour les âges jusque x_0 : estimation, lissage, calibrage	2
1.4.2. Méthode 2 pour les âges $x > x_0$: prolongation calculée des α_x et β_x	4
1.5. Modélisation $q_{x,t}$: révision de la méthode du WP 20-04	7
1.5.1. Discussion	7
1.5.2. Nouvelle approche	7
1.5.3. Détermination de τ et de ϕ	8
1.6. Evolution des grands âges	9
1.6.1. Croissance des $q_{x,t}$ aux grands âges ?	9
1.6.2. Conséquence sur les projections de quotients de mortalité	12
1.6.3. Prise en compte des $q_{x,t}$ croissants	13
2. Calcul des quotients de mortalité par sexe.....	14
2.1. Sélection des paramètres de la méthode	14
2.2. Valeur des coefficients	15
2.3. Profils des $q_{x,t}$ selon les âges pour certaines années	16
2.4. Profils des $q_{x,t}$ pour les hommes dans le temps pour certains âges	17
2.5. Résultats en termes d'espérances de vie transversales et générationnelles	19
3. Analyse de sensibilité des résultats aux paramètres.....	21
3.1. Modification de l'année de dernière observation	21
3.2. Modification du dernier âge estimé (x_0)	22
3.3. Modification de l'âge limite	23
4. Calcul des $q_{x,t}$ unisexes	24
4.1. Méthode classique	24
4.2. Méthode proportionnelle	25
4.3. Calcul de la répartition de la population par sexe	26
4.4. Projection de la répartition de la population par sexe	27
5. Résultats	28
5.1. Comparaison des espérances de vie unisexes selon les deux méthodes	28
5.2. Comparaison des espérances de vie à partir de 100 ans selon les deux méthodes	30
5.3. Comparaison des espérances de vie hommes, femmes et unisexes	30
5.4. Quotients de mortalité unisexes par année selon les deux méthodes	31
5.5. Quotients de mortalité par âge selon la méthode proportionnelle	34

Liste des tableaux

Tableau 1 : Paramètres de la méthode	14
Tableau 2 : Valeurs estimées et calculées des alpha et beta	15
Tableau 3 : Espérances de vie transversales à divers âges	19
Tableau 4 : Espérances de vie générationnelles à divers âges	19
Tableau 5 : Modification de l'année de dernière observation	21
Tableau 6 : Modification du dernier âge estimé	22
Tableau 7 : Modification de l'âge limite	23
Tableau 8 : Espérances de vie transversales à divers âges	30
Tableau 9 : Espérances de vie générationnelles à divers âges	30

Liste des graphiques

Graphique 1 : Alphas et betas estimés et projetés	3
Graphique 2 : Evolution des quotients de mortalité des hommes aux grands âges entre 1993 et 2007	9
Graphique 3 : Evolution des quotients de mortalité des femmes aux grands âges entre 1993 et 2007	11
Graphique 4 : Quotients de mortalité par âge des hommes entre 1975 et 2100	16
Graphique 5 : Quotients de mortalité par âge des femmes entre 1975 et 2100	16
Graphique 6 : Profils des $q_{x,t}$ pour les hommes dans le temps pour certains âges	17
Graphique 7 : Espérances de vie transversales et générationnelles pour les hommes et les femmes	20
Graphique 8 : Espérances de vie à la naissance à long terme méthode 1	24
Graphique 9 : Répartition calculée Hommes/Femmes de 0 à 100 ans entre 1970 et 2060	27
Graphique 10 : Comparaison des espérances de vie unisexes selon les deux méthodes	28
Graphique 11 : Comparaison des espérances de vie à partir de 100 ans selon les deux méthodes	30
Graphique 12 : Quotients de mortalité unisexes par année selon les deux méthodes	31
Graphique 13 : Projection et observation des quotients unisexes à divers âges	34

1. Méthode générale de projection des quotients de mortalité

1.1. Principe de base

L'approche proposée définit un modèle pour les quotients de mortalité prospectifs $q_{x,t}$ découpé en deux parties selon les âges : l'une pour les âges auxquels une tendance claire se dessine dans les observations, l'autre pour les âges supérieurs. Pour les premiers âges, deux jeux de paramètres sont estimés sur base des données observées ; dans la seconde, des jeux de paramètres comparables sont construits.

Cette méthode permet donc d'obtenir très simplement les quotients de mortalité futurs à partir d'un jeu de paramètres.

Le modèle théorique est en principe identique quelle que soit la population étudiée ou la région géographique couverte : hommes, femmes, unisexe, pour le Royaume ou pour un Arrondissement. Seuls certains paramètres de la méthode seront éventuellement adaptés aux caractéristiques spécifiques des données. Ainsi, l'âge au-delà duquel la méthode des grands âges s'applique pourrait différer selon qu'il s'agisse des hommes ou des femmes.

Le cas des quotients unisexes fait cependant l'objet d'une analyse particulière présentée dans la partie 4 de cette étude.

1.2. Notations

- x indique un âge
- t indique une année calendrier
- $q_{x,t}$ représente la probabilité pour une personne, ayant atteint l'âge $(x-1)$ au 1er janvier de l'année t , de décéder au cours de l'année t , année durant laquelle elle aurait atteint l'âge x . Il s'agit donc de quotients mortalité *prospectifs*, permettant de faire évoluer une population d'un premier janvier au premier janvier de l'année suivante.

1.3. Lissage des séries

Les observations sont disponibles entre 1948 et 2007. Pour atténuer les chocs dans les observations, en particulier pour les âges où peu de décès sont observés, on se donne la possibilité de lisser les séries des quotients de mortalité observés tant sur le temps que sur les âges.

On définit les premiers paramètres de la méthode :

Paramètres :

- t_0 : dernière année d'observation (scénario central : 2007)
- $nSmoothYears$: nombre d'année de lissage (scénario central : 0)
- $nSmoothAges$: nombre d'âges de lissage (scénario central : 2 autour de l'âge x)
- $SmoothAgesFrom$: premier âge de lissage (scénario central : 2, soit à partir de q_1)

1.4. Modélisation des $q_{x,t}$ prospectifs : méthode wp0420

Le modèle général est exprimé sous la forme d'une exponentielle négative :

$$q_{x,t} = e^{\alpha_x + \beta_x t} \quad (1)$$

Où

- $0 \leq q_{x,t} \leq 1, \forall x, \forall t$
- $\alpha_x \leq 0, \forall x$
- $\beta_x \leq 0, \forall x$

α_x est donc le logarithme de la valeur de départ de $q_{x,t}$, soit $\ln(q_{x,0})$.

β_x indique la vitesse de décroissance de $q_{x,t}$ en fonction de t .

Les données ne présentant une tendance claire que jusqu'à un certain âge x_0 (entre 95 et 100 ans), ce modèle ne peut être estimé valablement que pour $x \leq x_0$. Pour les valeurs supérieures de x , une autre méthode d'évaluation des α_x et β_x est proposée.

1.4.1. Méthode 1 pour les âges jusque x_0 : estimation, lissage, calibrage

L'estimation des coefficients s'effectue en trois étapes.

a. Etape 1: estimation par une méthode OLS

Les coefficients α_x et β_x sont estimés pour chaque âge x par une méthode des moindres carrés après passage au logarithme.

En raison de la modification très nette de la tendance des quotients de mortalité observée à partir du début des années '70, la période d'estimation retenue est 1970-2007.

b. Etape 2: lissage des β_x

Après estimation, on procède à un lissage des coefficients β_x . Ce lissage permet une transition naturelle d'une courbe $q_{x,t}$ à la suivante, en évitant, d'une part, les chocs dans la courbe des β_x et, d'autre part, le croisement à long terme des courbes consécutives des $q_{x,t}$.

c. Etape 3: calibrage des α_x

Les α_x sont ensuite réestimés sur la fin de la période d'observations en gardant les β_x constants, de sorte que les courbes estimées "s'accrochent" correctement aux dernières valeurs observées.

De nouveaux paramètres sont donc introduits :

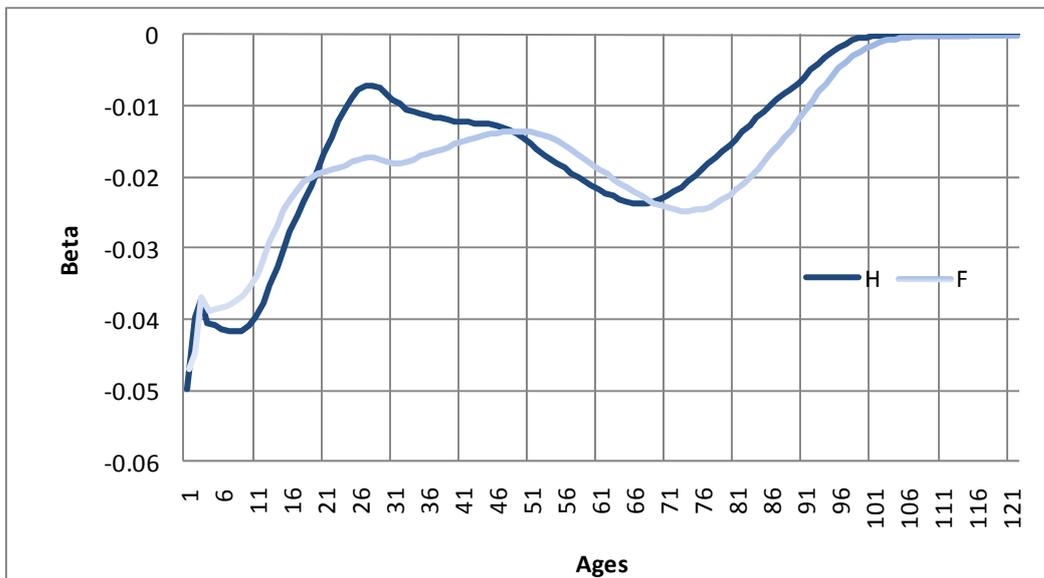
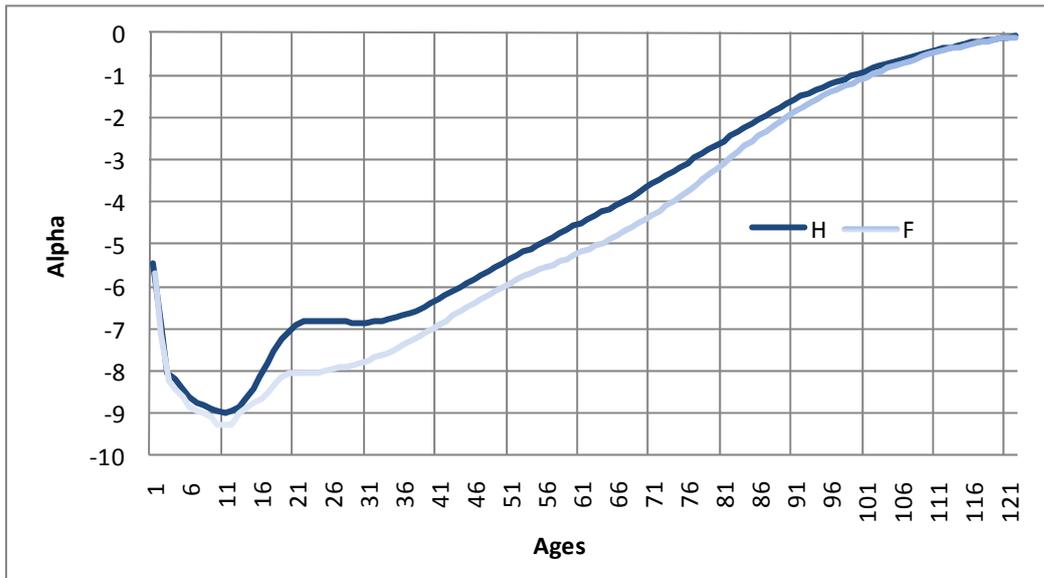
Paramètres :

- x_0 : dernier âge estimé (scénario central : 97)
- $nSmoothBetas$: nombre d'âges de lissages des β_x (scénario central : 4)
- $SmoothBetasFrom$: premier âge de lissages des β_x (scénario central : 3)
- $nReestAlphas$: nombre d'années pour le calibrage des α_x (scénario central : 10)

d. Premiers résultats

Les figures suivantes représentent graphiquement les valeurs des α_x et β_x résultant de ces calculs jusqu'à l'âge x_0 pour le Royaume, en distinguant les hommes et les femmes. Les valeurs pour les âges supérieurs résultent des calculs exposés plus loin.

Graphique 1 : Alphas et betas estimés



1.4.2. Méthode 2 pour les âges $x > x_0$: prolongation calculée des α_x et β_x

Pour les âges élevés, on ne dispose pas de données suffisantes pour les $q_{x,t}$. En supposant que le même modèle exponentiel (1) s'applique à ces grands âges, il s'agit d'élaborer une formule pour le calcul des valeurs de α_x et β_x pour $x > x_0$.

La démarche s'effectue en deux étapes : d'abord en considérant constants les âges limites, c'est-à-dire les âges auxquels la probabilité de décès vaut 1, puis en généralisant les formules pour des âges limites croissant dans le temps.

a. Ages limites constants

Soit :

- \tilde{x} l'âge limite, i.e. tel que $q_{\tilde{x},t} = 1, \forall t$
- x_0 le dernier âge estimé

On a donc:

$$q_{\tilde{x},t} = e^{\alpha_{\tilde{x}} + \beta_{\tilde{x}}t} = 1 \quad (2)$$

Il s'en suit que :

$$\alpha_{\tilde{x}} = \beta_{\tilde{x}} = 0 \quad (3)$$

En partant des α_{x_0} et β_{x_0} du dernier âge estimé x_0 , on fait décroître α_x et β_x vers 0 par les formules suivantes :

$$\alpha_x = \alpha_{x_0} \lambda_x^\zeta \quad (4)$$

$$\beta_x = \beta_{x_0} \lambda_x^\zeta \quad (5)$$

où

$$\lambda_x = \frac{(\tilde{x} - x)}{(\tilde{x} - x_0)} \quad (6)$$

et

$$\zeta > 0 \quad (7)$$

La formule (1) devient donc pour les âges supérieurs à x_0 :

$$q_{x,t} = e^{\alpha_{x_0} \lambda_x^\zeta + \beta_{x_0} \lambda_x^\zeta t} \quad (8)$$

La valeur de ζ , qui détermine la vitesse de décroissance des α_x et des β_x , et, partant celle des $q_{x,t}$, est calculée plus loin.

b. Ages limites croissants

On peut aisément généraliser les formules précédentes pour intégrer l'augmentation des âges limites, c'est-à-dire l'augmentation dans le temps de \tilde{x} qui doit alors s'écrire \tilde{x}_t . Cette augmentation de l'âge limite peut s'avérer utile pour établir des espérances de vie générationnelles qui impliquent de prévoir des $q_{x,t}$ à des horizons très éloignés. On remarquera que, dans ce cas, les coefficients α_x et β_x dépendent de t pour $x > x_0$.

Gain d'âge limite

Soient :

- θ le gain d'âge limite par année ($\Delta^t \tilde{x}_t = \theta$)
- t_0 la dernière année observée

On peut généraliser (6) en écrivant par exemple :

$$\lambda_{x,t} = \frac{(\tilde{x}_{t_0} + \theta(t - t_0) - x)}{(\tilde{x}_{t_0} + \theta(t - t_0) - x_0)} \quad (9)$$

Et (4) et (5) deviennent respectivement :

$$\alpha_{x,t} = \alpha_{x_0} \lambda_{x,t}^\zeta \quad (10)$$

$$\beta_{x,t} = \beta_{x_0} \lambda_{x,t}^\zeta \quad (11)$$

La forme générale des $q_{x,t}$ pour les âges supérieurs à x_0 avec incorporation de l'augmentation des âges limites ne dépend plus que de valeurs connues ou fixées, de ζ et du temps. Elle s'écrit :

$$q_{x,t} = e^{\alpha_{x_0} \left[\frac{(\tilde{x}_{t_0} + \theta(t - t_0) - x)}{(\tilde{x}_{t_0} + \theta(t - t_0) - x_0)} \right]^\zeta} + \beta_{x_0} \left[\frac{(\tilde{x}_{t_0} + \theta(t - t_0) - x)}{(\tilde{x}_{t_0} + \theta(t - t_0) - x_0)} \right]^\zeta t \quad (12)$$

Détermination de ζ : méthode basée sur les $q_{x,t}$

Le coefficient ζ est calculé de telle sorte que la dérivée de $q_{x,t}$ par rapport à x en $x_0 + 1$ soit identique à celle en x_0 , ce qui peut s'écrire de façon discrète :

$$\left. \frac{\Delta q_{x,t}}{\Delta x} \right|_{x_0+1} = \left. \frac{\Delta q_{x,t}}{\Delta x} \right|_{x_0} \quad (13)$$

soit :

$$\frac{q_{(x_0+1),t} - q_{(x_0),t}}{x_0 + 1 - x_0} = \frac{q_{x_0,t} - q_{(x_0-1),t}}{x_0 - (x_0 - 1)} \quad (14)$$

Et donc :

$$q_{(x_0+1),t} = 2q_{x_0,t} - q_{(x_0-1),t} \quad (15)$$

Par ailleurs, il suit de (8) que :

$$\ln(q_{(x_0+1),t}) = \alpha_{x_0} \lambda_{(x_0+1),t}^{\zeta} + \beta_{x_0} \lambda_{(x_0+1),t}^{\zeta} t \quad (16)$$

$$\ln(q_{(x_0+1),t}) = \lambda_{(x_0+1),t}^{\zeta} (\alpha_{x_0} + \beta_{x_0} t) \quad (17)$$

$$\ln(q_{(x_0+1),t}) = \lambda_{(x_0+1),t}^{\zeta} \ln(q_{x_0,t}) \quad (18)$$

Par conséquent :

$$\zeta_t = \frac{\frac{\ln(q_{(x_0+1),t})}{\ln(q_{x_0,t})}}{\ln(\lambda_{(x_0+1),t}^{\zeta})} \quad (19)$$

En introduisant (15) et en transformant (9) pour $x = x_0 + 1$, on obtient finalement la formule générale suivante pour ζ_t :

$$\zeta_t = \frac{\ln\left(\frac{\ln(2q_{x_0,t} - q_{(x_0-1),t})}{\ln(q_{x_0,t})}\right)}{\ln\left(1 - \frac{1}{(\tilde{x}_{t_0} + \theta(t - t_0) - x_0)}\right)} \quad (20)$$

Les valeurs de $\alpha_{x,t}$ et $\beta_{x,t}$ ne dépendent donc plus que de valeurs calculées par les estimations (méthode 1) et d'hypothèses à fixer.

$$\alpha_{x,t} = \alpha_{x_0} \frac{\ln\left(\frac{\ln(2q_{x_0,t} - q_{(x_0-1),t})}{\ln(q_{x_0,t})}\right)}{\ln\left(1 - \frac{1}{(\tilde{x}_{t_0} + \theta(t - t_0) - x_0)}\right)} \quad (21)$$

$$\beta_{x,t} = \beta_{x_0} \frac{\ln\left(\frac{\ln(2q_{x_0,t} - q_{(x_0-1),t})}{\ln(q_{x_0,t})}\right)}{\ln\left(1 - \frac{1}{(\tilde{x}_{t_0} + \theta(t - t_0) - x_0)}\right)} \quad (22)$$

Ces définitions replacées dans (23), permettent d'obtenir une valeur projetée de $q_{x,t}$.

$$q_{x,t} = e^{\alpha_{x,t} + \beta_{x,t} t} \quad (23)$$

Les valeurs de $\alpha_{x,t}$ et $\beta_{x,t}$ sont donc déterminées, pour les âges élevés, par les formules (21) et (22) qui dépendent :

- du temps,
- de x_0 , dernier âge d'estimation,
- de $q_{x_0,t}$ et $q_{(x_0-1),t}$, valeurs des $q_{x,t}$ aux derniers âges obtenues par la méthode 1,
- de t_0 , dernière année de la période d'estimation,
- de \tilde{x}_{t_0} , âge limite pour la dernière année de la période d'estimation,
- de θ , gain d'âge limite par année calendrier,
- de α_{x_0} et β_{x_0} , valeurs des coefficients calculées pour le dernier âge estimé (méthode 1).

Paramètres supplémentaires pour les grands âges :

- x_0 : dernier âge estimé (scénario central : 97)
- \tilde{x}_{t_0} : âge limite lors de la dernière année d'observations (scénario central : 130)
- θ : gain d'âge limite par année calendrier (scénario central : 0)

1.5. Modélisation $q_{x,t}$: révision de la méthode du WP 20-04¹**1.5.1. Discussion**

Le calcul décrit plus haut fournit des valeurs de $q_{x,t}$ dont la décroissance dans le temps n'est pas garantie, même pour une valeur nulle de θ . En effet, on voit dans (20) que le numérateur de ζ_t dépend de $\frac{\ln(2q_{x_0,t} - q_{(x_0-1),t})}{\ln(q_{x_0,t})}$ et donc des valeurs de $q_{x_0,t}$ et de $q_{(x_0-1),t}$ qui varient dans le temps.

Des tests ont permis de constater que les valeurs de ζ_t pouvaient effectivement changer de sens de croissance dans le temps à certains âges. Cela génère dès lors des $q_{x,t}$ qui recommencent à augmenter dans le temps, ce qui semble contre-intuitif et en tout cas contraire au modèle de base retenu.

1.5.2. Nouvelle approche

Une solution simple est de supprimer (ou à tout le moins de limiter) la dépendance au temps en procédant de façon similaire à la méthode 2 présentée plus haut, mais en prolongeant les α_x et les β_x au lieu des $q_{x,t}$. En effet, la prolongation des $q_{x,t}$ utilise les valeurs de $q_{x_0,t}$ et de $q_{(x_0-1),t}$ qui dépendent du temps, tandis que la prolongation semblable des α_x ne dépend que de α_{x_0} et α_{x_0-1} . Il en va de même pour les β_x .

On définit donc :

$$\alpha_{x,t} = \alpha_{x_0} \lambda_{x,t}^{\tau} \quad (24)$$

et

$$\beta_{x,t} = \beta_{x_0} \lambda_{x,t}^{\varphi} \quad (25)$$

Et donc (8) devient :

$$q_{x,t} = e^{\alpha_{x_0} \cdot \lambda_x^{\tau} + \beta_{x_0} \cdot \lambda_x^{\varphi} \cdot t} \quad (26)$$

¹ Bureau fédéral du Plan : Working Paper 20-04 « *Quotients de mortalité prospectifs* », 2004

1.5.3. Détermination de τ et de ϕ

On fixe la contrainte comme en(13) :

$$\left. \frac{\Delta\alpha_x}{\Delta x} \right|_{x_0+1} = \left. \frac{\Delta\alpha_x}{\Delta x} \right|_{x_0} \quad (27)$$

ce qui revient à :

$$\frac{\alpha_{x_0+1} - \alpha_{x_0}}{x_0 + 1 - x_0} = \frac{\alpha_{x_0} - \alpha_{x_0-1}}{x_0 - (x_0 - 1)} \quad (28)$$

et donc :

$$\alpha_{x_0+1} = 2\alpha_{x_0} - \alpha_{x_0-1} \quad (29)$$

$$\alpha_{x_0+1} = \alpha_{x_0} \lambda_{x_0+1,t}^\tau = 2\alpha_{x_0} - \alpha_{x_0-1} \quad (30)$$

$$\lambda_{x_0+1,t}^\tau = 2 - \frac{\alpha_{x_0-1}}{\alpha_{x_0}} \quad (31)$$

Par conséquent, τ dépend de t à travers la définition de $\lambda_{x_0+1,t}$ (si θ n'est pas nul) et peut s'écrire de manière générale :

$$\tau_t = \frac{\ln\left(2 - \frac{\alpha_{x_0-1}}{\alpha_{x_0}}\right)}{\ln \lambda_{x_0+1,t}} \quad (32)$$

En remplaçant la valeur de $\lambda_{x_0+1,t}$, on obtient finalement la formule générale pour τ_t :

$$\tau_t = \frac{\ln\left(2 - \frac{\alpha_{x_0-1}}{\alpha_{x_0}}\right)}{\ln \frac{(\tilde{x}_{t_0} + \theta(t - t_0) - (x_0 + 1))}{(\tilde{x}_{t_0} + \theta(t - t_0) - x_0)}} \quad (33)$$

Et donc la valeur de α_x s'écrit :

$$\alpha_{x,t} = \alpha_{x_0} \frac{(\tilde{x}_{t_0} + \theta(t - t_0) - x)}{(\tilde{x}_{t_0} + \theta(t - t_0) - x_0)} \left(\frac{\ln\left(2 - \frac{\alpha_{x_0-1}}{\alpha_{x_0}}\right)}{\ln \frac{(\tilde{x}_{t_0} + \theta(t - t_0) - (x_0 + 1))}{(\tilde{x}_{t_0} + \theta(t - t_0) - x_0)}} \right) \quad (34)$$

Le même développement peut être fait pour $\beta_{x,t}$:

$$\varphi_{x,t} = \frac{\ln\left(2 - \frac{\beta_{x_0-1}}{\beta_{x_0}}\right)}{\ln \frac{(\tilde{x}_{t_0} + \theta(t - t_0) - (x_0 + 1))}{(\tilde{x}_{t_0} + \theta(t - t_0) - x_0)}} \quad (35)$$

et

$$\beta_{x,t} = \beta_{x_0} \frac{(\tilde{x}_{t_0} + \theta(t - t_0) - x)}{(\tilde{x}_{t_0} + \theta(t - t_0) - x_0)} \left(\frac{\ln\left(2 - \frac{\beta_{x_0-1}}{\beta_{x_0}}\right)}{\ln\left(\frac{\tilde{x}_{t_0} + \theta(t - t_0) - (x_0+1)}{\tilde{x}_{t_0} + \theta(t - t_0) - x_0}\right)} \right) \quad (36)$$

On obtient donc finalement une formulation des $q_{x,t}$ qui ne dépend plus ni de $q_{x_0,t}$ ni de $q_{x_0-1,t}$. Par conséquent, la décroissance dans le temps de toutes les fonctions $q_{x,t}$, quelle que soit la valeur de x , est assurée, tant que θ est nul.

Les valeurs de $\alpha_{x,t}$ et $\beta_{x,t}$ sont donc déterminées, pour les âges élevés, par :

- t , année de courante
- x , l'âge courant
- x_0 , dernier âge d'estimation,
- $\alpha_{x_0}, \alpha_{x_0-1}, \beta_{x_0}, \beta_{x_0-1}$, coefficients estimés
- t_0 , dernière année de la période d'estimation,
- \tilde{x}_{t_0} , âge limite pour la dernière année de la période d'estimation,
- θ , gain d'âge limite par année calendrier,

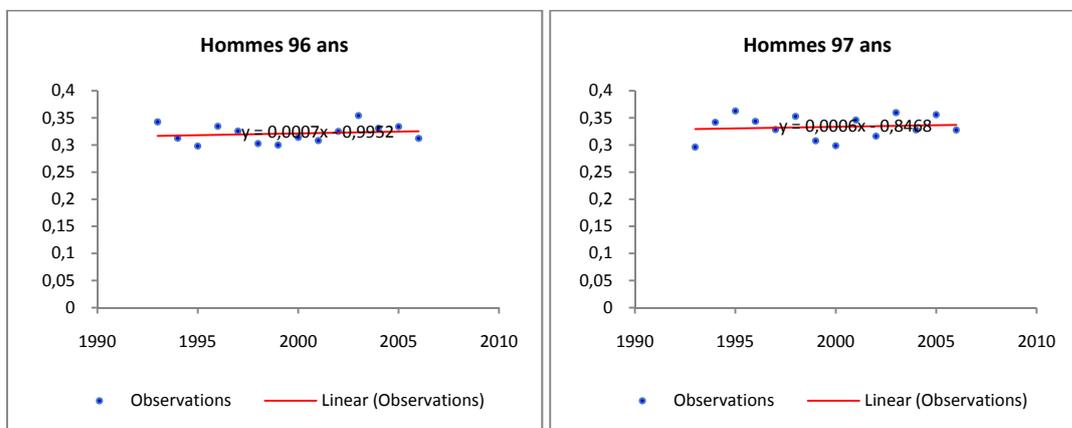
1.6. Evolution des grands âges

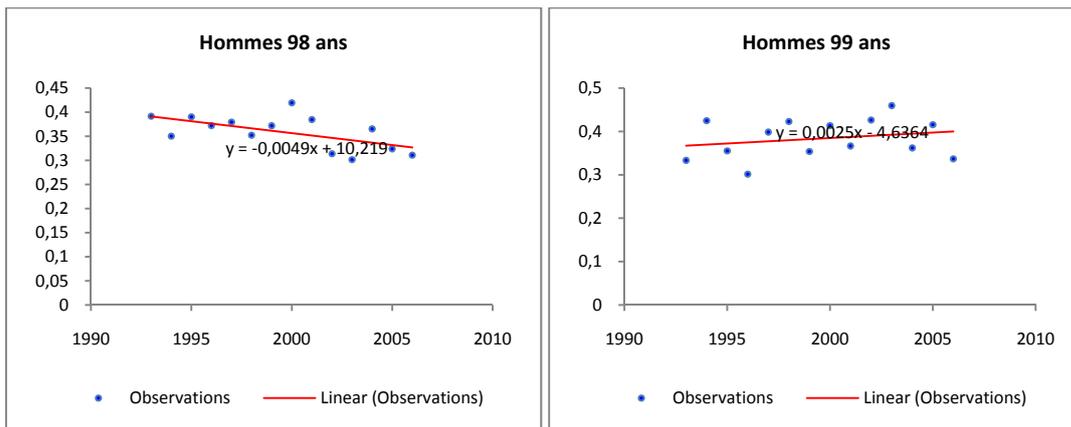
1.6.1. Croissance des $q_{x,t}$ aux grands âges ?

En analysant le comportement récent des quotients de mortalité pour les grands âges, on observe que *les quotients de mortalité ont tendance à augmenter dans le temps à partir d'un certain âge*.

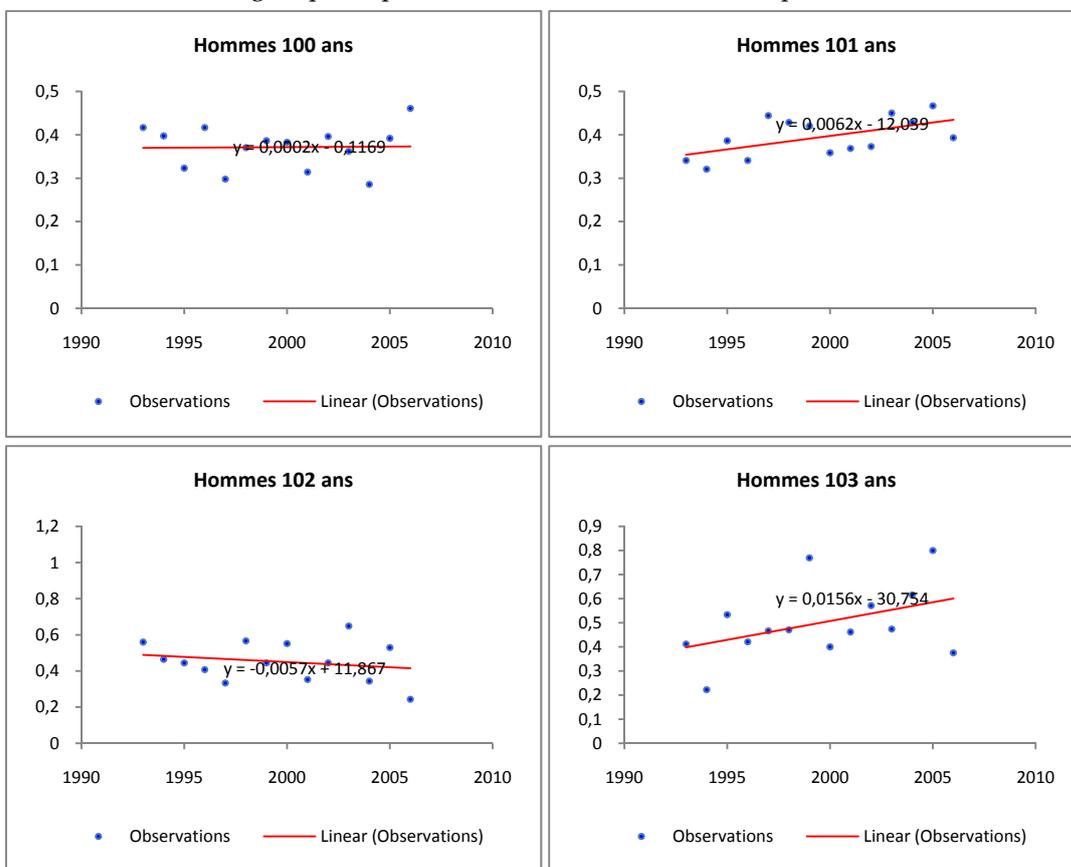
Les quelques graphiques ci-dessous illustrent cette évolution pour les hommes et les femmes sur les quinze dernières années. Sur chaque graphique, un trend linéaire a été ajouté : on constate que pour la plupart des âges, le trend est positif.

Graphique 2 : Evolution des quotients de mortalité des hommes aux grands âges entre 1993 et 2007



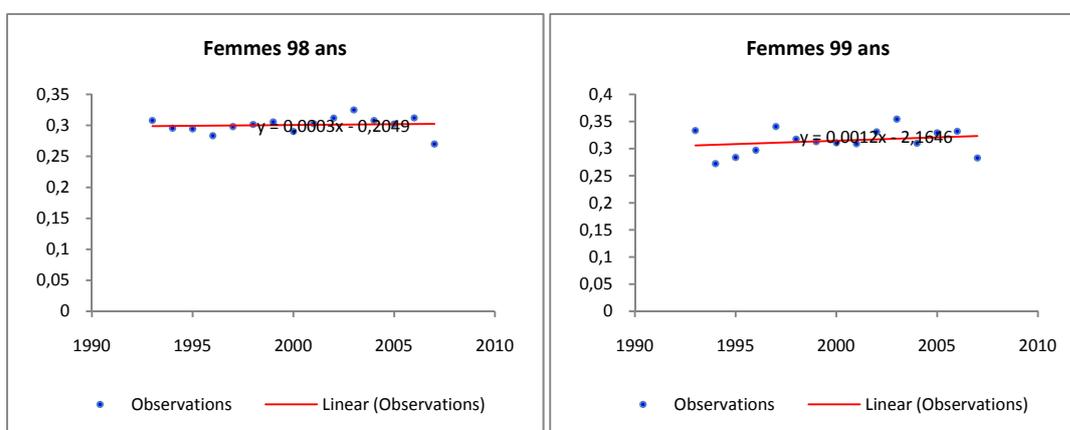


A 96 et 97 ans, une légère pente positive commence à se dessiner qui s'accroît à 99 ans.

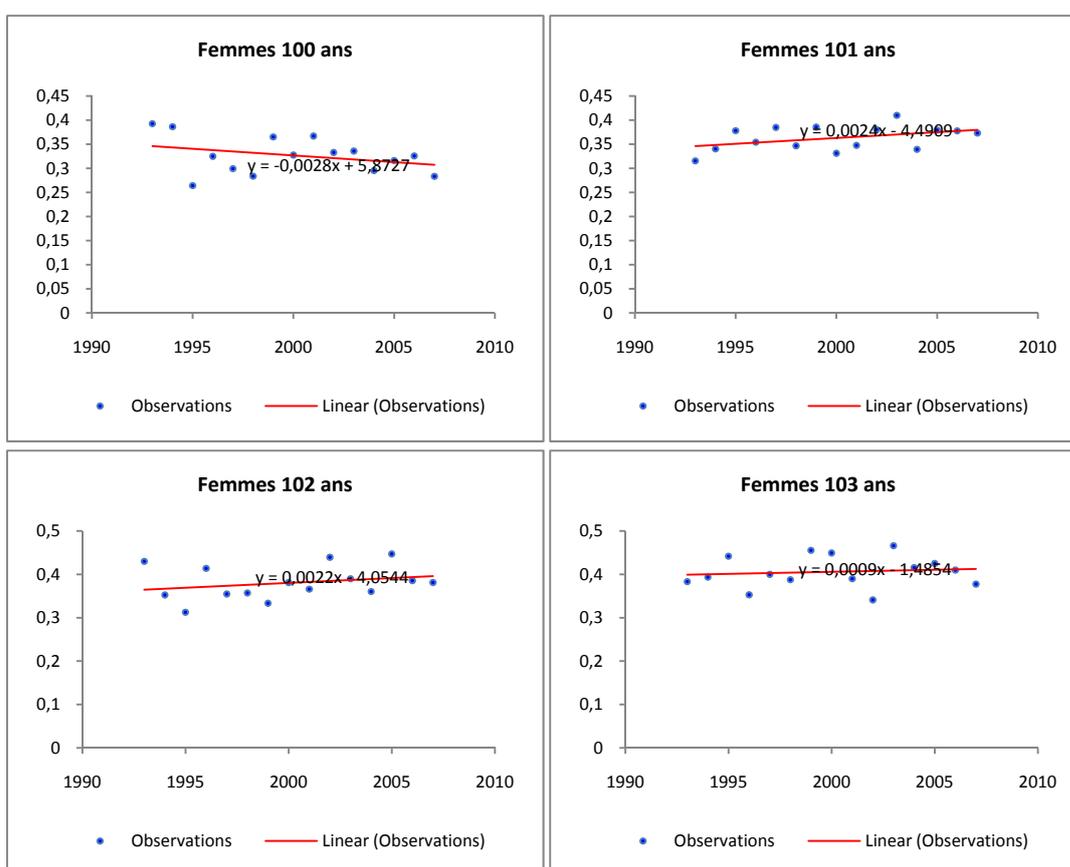


A partir de 99 ans, exception faite des observations de 102 ans, la croissance des quotients de mortalité devient la norme.

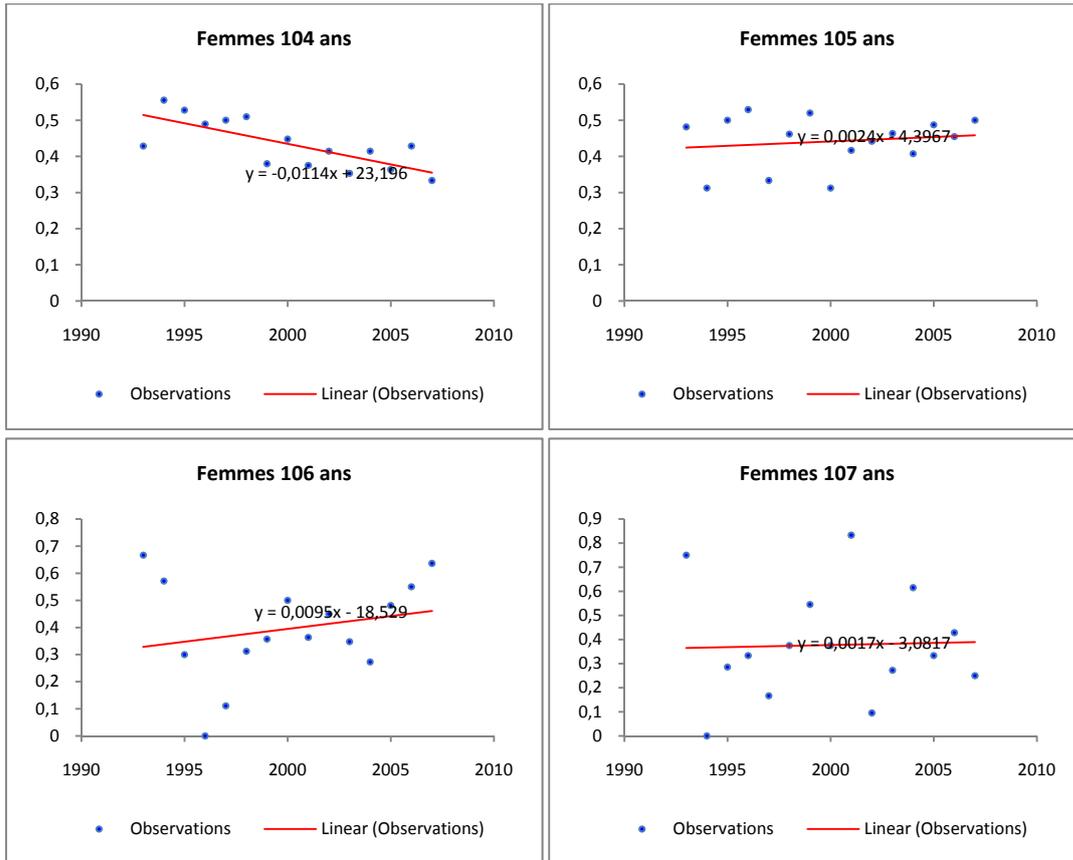
Graphique 3 : Evolution des quotients de mortalité des femmes aux grands âges entre 1993 et 2007



La croissance des quotients apparaît un peu plus tard chez les femmes que chez les hommes : dès 96 ans chez les hommes, dès 98 chez les femmes.



La décroissance des quotients réapparaît sporadiquement (100 ans, 104 ans) mais la tendance globale est claire chez les femmes aussi.



1.6.2. Conséquence sur les projections de quotients de mortalité

Ce constat a son prolongement dans les calculs développés dans les parties suivantes. En particulier, comme le modèle exige une valeur positive des $\alpha_{x,t}$ et $\beta_{x,t}$, ces deux valeurs vont rapidement décroître et $\beta_{x,t}$ va devenir quasi nul, rendant quasi-constants les quotients dans le temps.

En effet :

$$\beta_{x,t} \approx 0 \Rightarrow q_{x,t} \approx \alpha_{x,t} \tag{37}$$

Or, par (34), $\alpha_{x,t}$ ne dépend du temps que si θ n'est pas nul. Il s'ensuit que, pour θ nul, les valeurs des $q_{x,t}$ restent constantes pour les grands âges, comme on le verra sur les graphiques montrant l'évolution des $q_{x,t}$ dans le temps.

1.6.3. Prise en compte des $q_{x,t}$ croissants

Dans les travaux futurs, même si ce constat ne concerne qu'un petit nombre d'individus, il y aura lieu d'analyser et de proposer une solution qui modélise aussi ces caractéristiques. Un nouveau modèle pour les grands âges devrait sans doute autoriser la croissance des $q_{x,t}$.

Dans le cadre de cet exercice, on se contentera cependant d'appliquer le modèle de base avec les $\beta_{x,t} \approx 0$ et donc de rejeter les courbes de $q_{x,t}$ croissantes : tout au plus les courbes des quotients de mortalité deviennent quasi-constantes dans le temps à partir d'un certain âge.

2. Calcul des quotients de mortalité par sexe

L'application du chapitre précédent permet de calculer les quotients de mortalité prospectifs pour n'importe quel groupe d'individus. Ce chapitre donne les résultats obtenus séparément pour les hommes et les femmes du Royaume.

2.1. Sélection des paramètres de la méthode

On verra dans la partie 3 l'impact que peuvent avoir certains paramètres sur les résultats obtenus. Les paramètres du scénario central sont présentés dans le tableau ci-dessous, ainsi que l'intervalle des valeurs acceptables.

Tableau 1 : Paramètres de la méthode

Nom	Description	Valeurs acceptables	Scénario central
t_0	dernière année d'observation	2001-2007	2007
nSmoothYears	nombre d'années de lissage	0-5	0
nSmoothAges	nombre d'âges de lissage	0-5	2
SmoothAgesFrom	premier âge de lissage	0-95	2
nSmoothBetas	nombre de lissages des β_x	0-5	4
SmoothBetasFrom	premier âge de lissages des β_x	2-100	3
nReestAlphas	nombre de périodes pour le calibrage des α_x	4-15	10
x_0	dernier âge estimé	85-100	97
\tilde{x}_{t_0}	âge limite lors de la dernière année d'observations	122-140	130
θ	gain d'âge limite par année calendrier	0-10	0

2.2. Valeur des coefficients

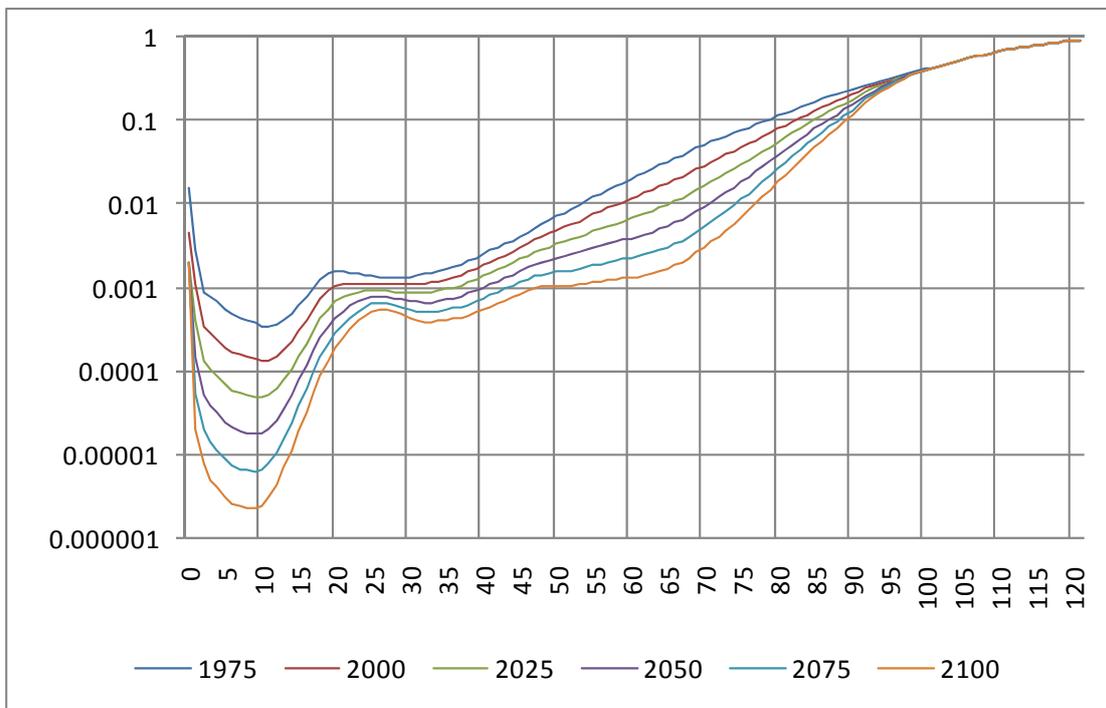
Tableau 2 : Valeurs estimées et calculées des alpha et beta

Age	Hommes		Femmes		Age	Hommes		Femmes		Age	Hommes		Femmes	
	Alpha	Beta	Alpha	Beta		Alpha	Beta	Alpha	Beta		Alpha	Beta	Alpha	Beta
0	-5,466	-0,050	-5,669	-0,047	40	-6,307	-0,012	-6,888	-0,015	80	-2,5536	-0,0146	-3,0757	-0,0218
1	-6,873	-0,040	-7,116	-0,045	41	-6,216	-0,012	-6,784	-0,015	81	-2,4524	-0,0137	-2,9431	-0,0209
2	-8,032	-0,037	-8,237	-0,037	42	-6,127	-0,012	-6,686	-0,014	82	-2,3532	-0,0127	-2,8094	-0,0199
3	-8,194	-0,040	-8,419	-0,039	43	-6,032	-0,012	-6,586	-0,014	83	-2,2544	-0,0117	-2,6798	-0,0189
4	-8,363	-0,041	-8,622	-0,039	44	-5,933	-0,013	-6,484	-0,014	84	-2,1539	-0,0108	-2,5526	-0,0178
5	-8,599	-0,041	-8,836	-0,038	45	-5,820	-0,013	-6,378	-0,014	85	-2,0540	-0,0099	-2,4294	-0,0167
6	-8,728	-0,042	-8,951	-0,038	46	-5,716	-0,013	-6,283	-0,014	86	-1,9560	-0,0091	-2,3072	-0,0156
7	-8,814	-0,042	-8,998	-0,037	47	-5,615	-0,013	-6,188	-0,014	87	-1,8638	-0,0083	-2,1892	-0,0144
8	-8,868	-0,042	-9,087	-0,037	48	-5,525	-0,014	-6,100	-0,013	88	-1,7731	-0,0076	-2,0758	-0,0132
9	-8,937	-0,041	-9,205	-0,035	49	-5,434	-0,015	-5,998	-0,014	89	-1,6856	-0,0068	-1,9663	-0,0120
10	-8,985	-0,040	-9,266	-0,034	50	-5,349	-0,015	-5,897	-0,014	90	-1,5954	-0,0059	-1,8611	-0,0107
11	-8,944	-0,038	-9,191	-0,031	51	-5,266	-0,016	-5,800	-0,014	91	-1,5094	-0,0050	-1,7593	-0,0094
12	-8,855	-0,035	-9,000	-0,029	52	-5,185	-0,017	-5,725	-0,014	92	-1,4257	-0,0040	-1,6637	-0,0080
13	-8,652	-0,033	-8,848	-0,027	53	-5,097	-0,018	-5,662	-0,014	93	-1,3531	-0,0031	-1,5728	-0,0067
14	-8,409	-0,030	-8,742	-0,025	54	-5,004	-0,018	-5,604	-0,015	94	-1,2823	-0,0024	-1,4852	-0,0057
15	-8,116	-0,028	-8,630	-0,023	55	-4,911	-0,019	-5,538	-0,016	95	-1,2180	-0,0017	-1,4051	-0,0047
16	-7,816	-0,025	-8,485	-0,022	56	-4,820	-0,019	-5,469	-0,016	96	-1,1532	-0,0013	-1,3283	-0,0039
17	-7,515	-0,023	-8,289	-0,021	57	-4,734	-0,020	-5,399	-0,017	97	-1,0883	-0,0008	-1,2515	-0,0031
18	-7,242	-0,021	-8,144	-0,020	58	-4,648	-0,021	-5,327	-0,018	98	-1,0252	-0,0005	-1,1769	-0,0024
19	-7,033	-0,019	-8,045	-0,020	59	-4,570	-0,021	-5,250	-0,018	99	-0,9639	-0,0003	-1,1045	-0,0019
20	-6,906	-0,017	-8,040	-0,019	60	-4,488	-0,022	-5,173	-0,019	100	-0,9044	-0,0002	-1,0343	-0,0014
21	-6,839	-0,014	-8,037	-0,019	61	-4,411	-0,022	-5,101	-0,020	101	-0,8466	-0,0001	-0,9664	-0,0011
22	-6,819	-0,012	-8,043	-0,019	62	-4,328	-0,023	-5,033	-0,020	102	-0,7907	-0,0001	-0,9007	-0,0008
23	-6,803	-0,010	-8,014	-0,018	63	-4,245	-0,023	-4,962	-0,021	103	-0,7365	0,0000	-0,8372	-0,0006
24	-6,804	-0,009	-7,976	-0,018	64	-4,153	-0,023	-4,879	-0,021	104	-0,6841	0,0000	-0,7760	-0,0005
25	-6,800	-0,008	-7,940	-0,018	65	-4,061	-0,024	-4,794	-0,022	105	-0,6336	0,0000	-0,7170	-0,0003
26	-6,811	-0,007	-7,901	-0,017	66	-3,967	-0,024	-4,703	-0,023	106	-0,5848	0,0000	-0,6603	-0,0002
27	-6,821	-0,007	-7,874	-0,017	67	-3,874	-0,024	-4,611	-0,023	107	-0,5379	0,0000	-0,6059	-0,0002
28	-6,841	-0,008	-7,839	-0,018	68	-3,777	-0,023	-4,509	-0,024	108	-0,4929	0,0000	-0,5537	-0,0001
29	-6,846	-0,008	-7,801	-0,018	69	-3,675	-0,023	-4,404	-0,024	109	-0,4496	0,0000	-0,5038	-0,0001
30	-6,842	-0,009	-7,736	-0,018	70	-3,572	-0,023	-4,300	-0,024	110	-0,4083	0,0000	-0,4561	-0,0001
31	-6,829	-0,010	-7,670	-0,018	71	-3,470	-0,022	-4,194	-0,025	111	-0,3688	0,0000	-0,4108	0,0000
32	-6,811	-0,010	-7,613	-0,018	72	-3,372	-0,021	-4,084	-0,025	112	-0,3312	0,0000	-0,3678	0,0000
33	-6,781	-0,011	-7,554	-0,017	73	-3,273	-0,021	-3,967	-0,025	113	-0,2955	0,0000	-0,3270	0,0000
34	-6,734	-0,011	-7,475	-0,017	74	-3,174	-0,020	-3,845	-0,025	114	-0,2618	0,0000	-0,2886	0,0000
35	-6,683	-0,011	-7,365	-0,017	75	-3,072	-0,019	-3,722	-0,024	115	-0,2299	0,0000	-0,2525	0,0000
36	-6,630	-0,012	-7,260	-0,016	76	-2,970	-0,018	-3,596	-0,024	116	-0,2000	0,0000	-0,2188	0,0000
37	-6,569	-0,012	-7,172	-0,016	77	-2,866	-0,017	-3,469	-0,024	117	-0,1720	0,0000	-0,1874	0,0000
38	-6,490	-0,012	-7,091	-0,016	78	-2,762	-0,016	-3,339	-0,023	118	-0,1461	0,0000	-0,1583	0,0000
39	-6,401	-0,012	-6,996	-0,015	79	-2,658	-0,016	-3,208	-0,023	119	-0,1221	0,0000	-0,1316	0,0000
40	-6,307	-0,012	-6,888	-0,015	80	-2,554	-0,015	-3,076	-0,022	120	-0,1002	0,0000	-0,1074	0,0000

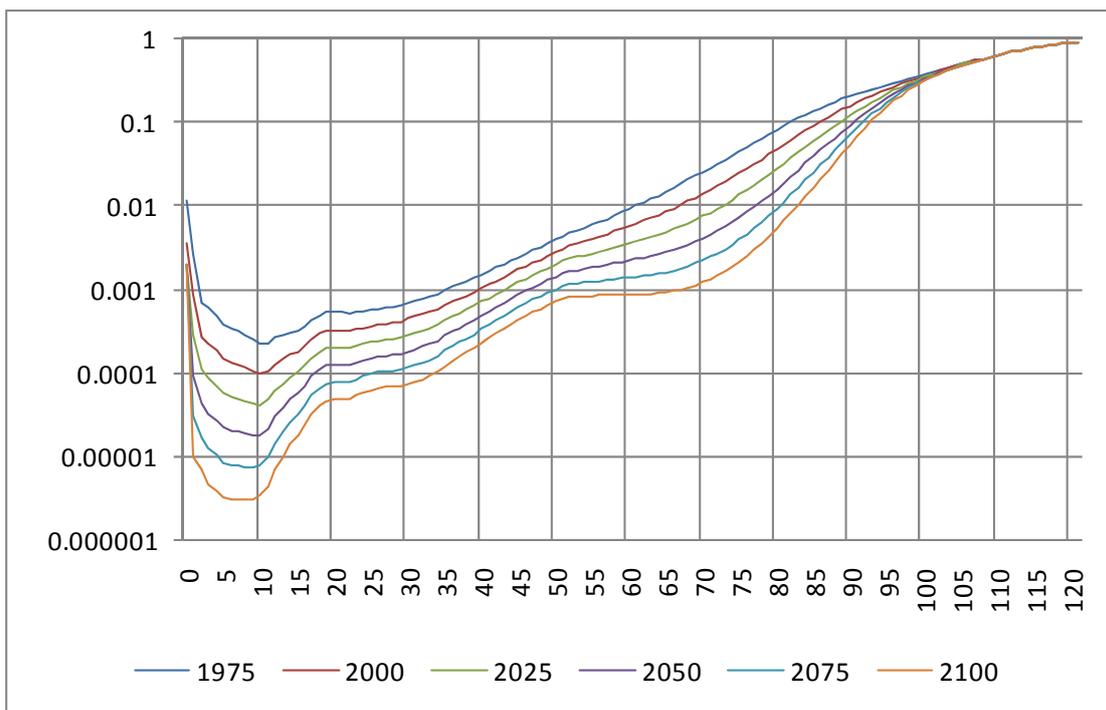
2.3. Profils des $q_{x,t}$ selon les âges pour certaines années

Comme annoncé, les $\beta_{x,t}$ deviennent quasi-nuls un peu avant l'âge de 100 ans pour les hommes et un peu après pour les femmes. La conséquence apparaît directement dans les deux graphiques suivants : il n'y a plus de diminution des quotients de mortalité à partir de ces âges.

Graphique 4 : Quotients de mortalité par âge des hommes entre 1975 et 2100



Graphique 5 : Quotients de mortalité par âge des femmes entre 1975 et 2100

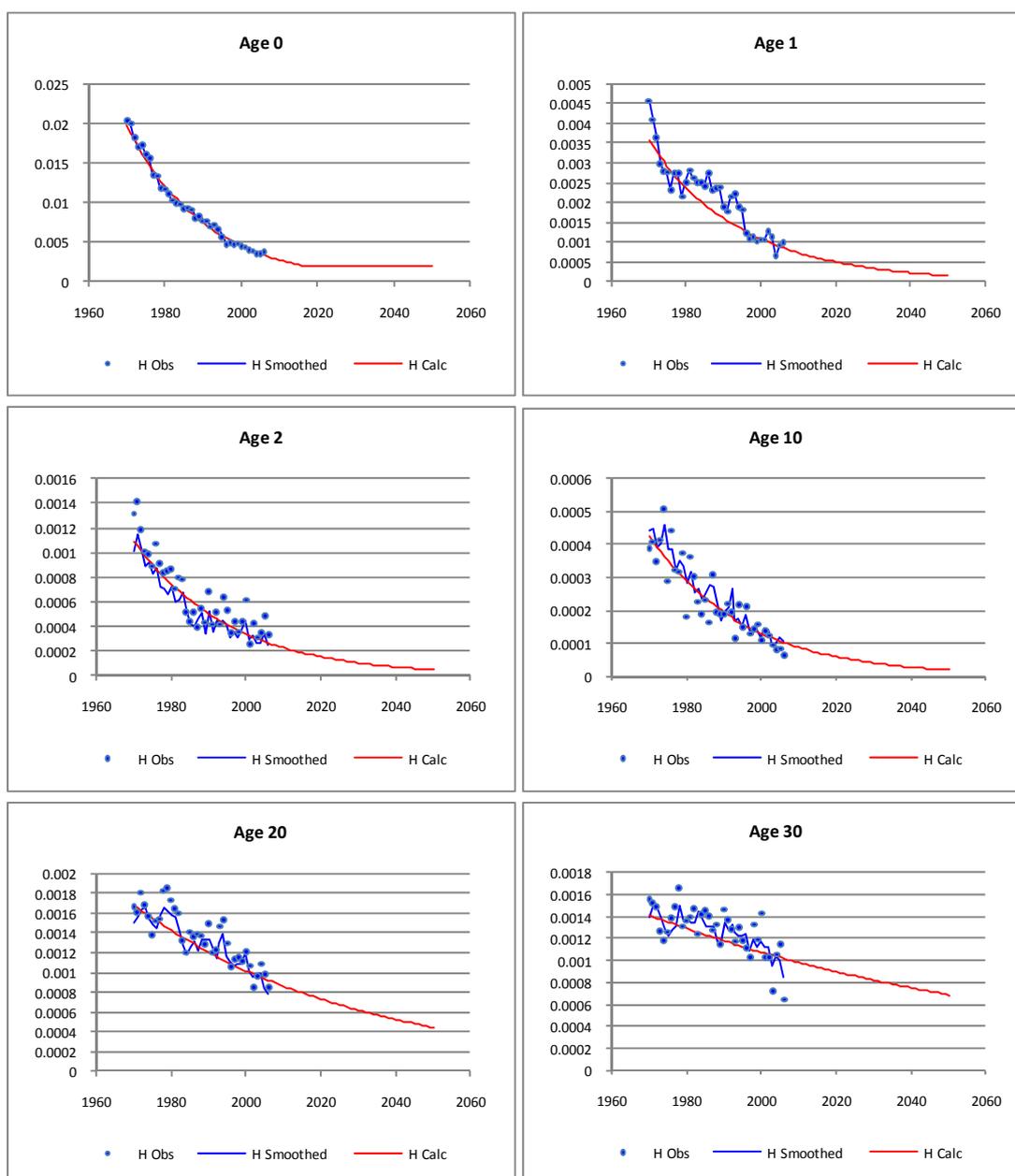


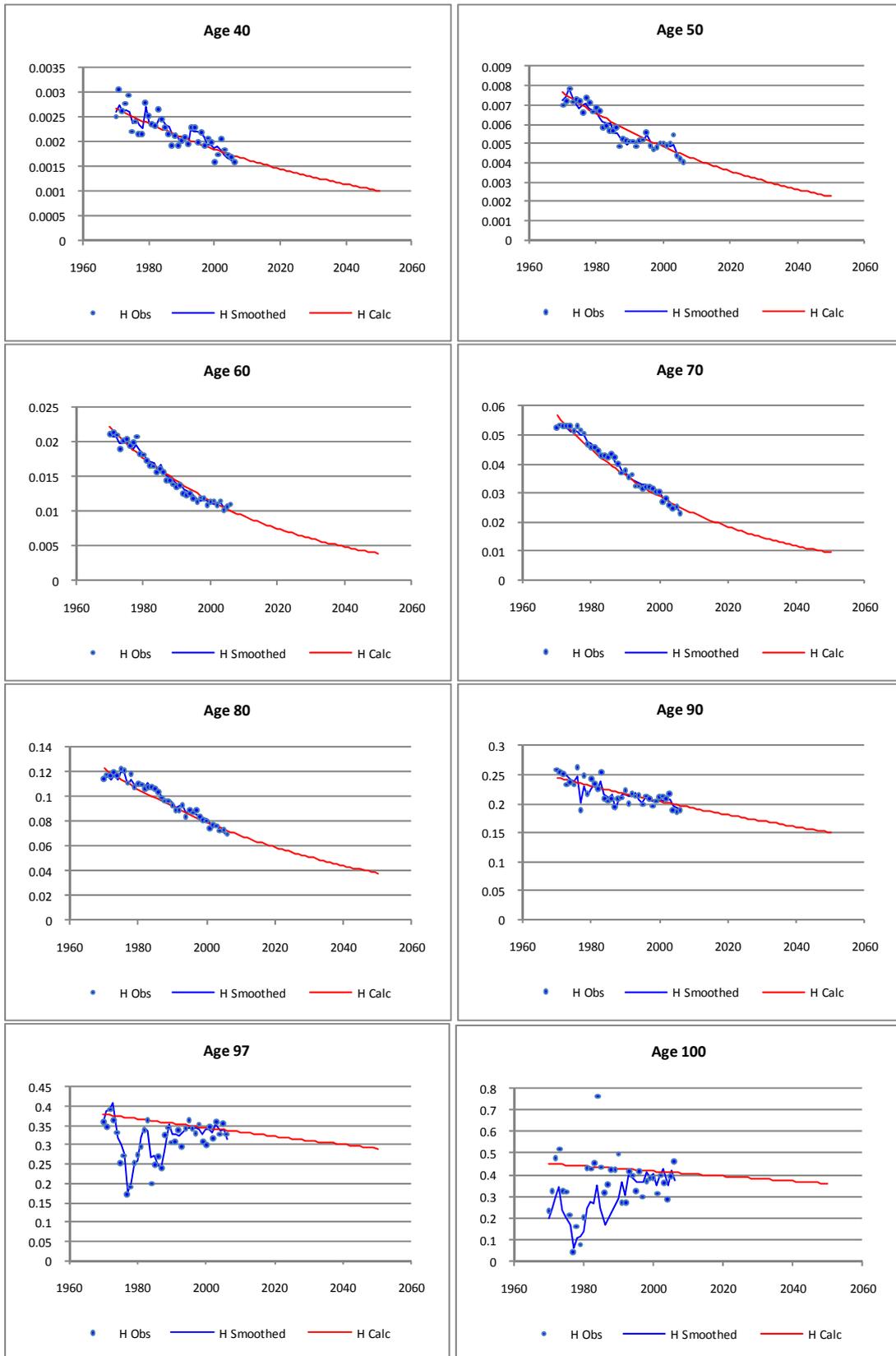
2.4. Profils des $q_{x,t}$ pour les hommes dans le temps pour certains âges

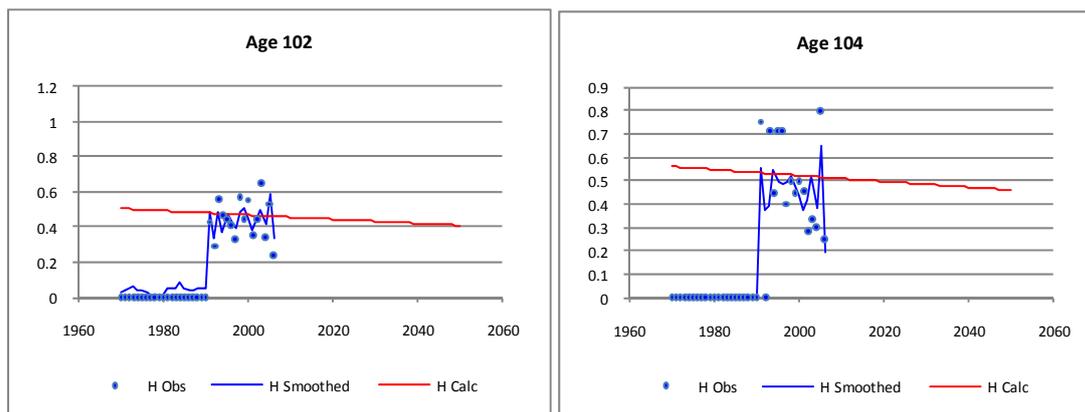
Afin d'illustrer les résultats obtenus par le modèle, les observations brutes et lissées ont été reprises dans chaque graphique ci-dessous en même temps que la courbe projetée sur le passé et le futur.

Seuls quelques âges typiques sont présentés. Des résultats semblables sont obtenus pour les femmes.

Graphique 6 : Profils des $q_{x,t}$ pour les hommes dans le temps pour certains âges







2.5. Résultats en termes d'espérances de vie transversales et générationnelles

Les deux tableaux ci-dessous donnent les valeurs des espérances de vie « classiques » et « générationnelles » à la naissance, à 65 et à 80 ans. Elles sont calculées sur le passé (2000) et en projections (2025 et 2050).

On constate que les résultats de la projection indiquent une poursuite de la progression de l'espérance de vie, mais moins rapide que dans les dernières décennies.

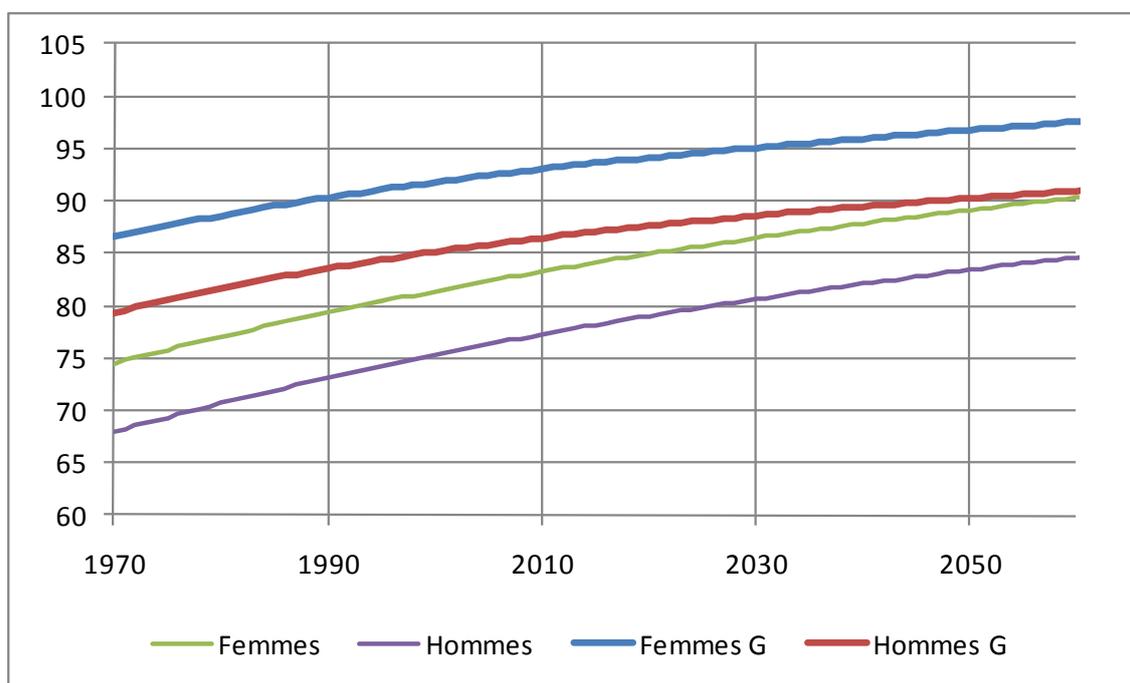
Tableau 3 : Espérances de vie transversales à divers âges

	Hommes			Femmes		
	2000	2025	2050	2000	2025	2050
0	75,29	79,83	83,36	81,39	85,64	88,91
65	16,03	18,93	21,37	19,97	23,15	25,73
80	6,97	8,16	9,29	8,81	10,67	12,31

Tableau 4 : Espérances de vie générationnelles à divers âges

	Hommes			Femmes		
	2000	2025	2050	2000	2025	2050
0	84,93	87,77	89,73	91,01	93,34	94,93
65	23,62	25,25	26,54	28,30	29,82	30,99
80	10,72	11,63	12,44	14,33	15,43	16,34

Graphique 7 : Espérances de vie transversales et générationnelles pour les hommes et les femmes



3. Analyse de sensibilité des résultats aux paramètres

Lors de l'exercice de 2003-2004, les données étaient disponibles jusqu'en 2001. L'application de la méthode initiale en incluant les nouvelles données a montré que les résultats en termes d'espérances de vie pouvaient être significativement différents selon la période d'estimation retenue.

Il semblait donc intéressant d'analyser la sensibilité des résultats à quelques-uns des paramètres de la méthode.

Il fallait un indicateur synthétique pour comparer facilement les résultats pour chaque paramètre. Les espérances de vie générationnelles ont été utilisées à cette fin.

On présente donc dans les tableaux suivants, pour chaque paramètre testé, les espérances de vie générationnelles des hommes (ExGHn) et des femmes (ExGFn), à la naissance, à 65 ans et à 80 ans, pour les années 2000, 2025 et 2050.

Chaque colonne est associée à une valeur du paramètre analysé.

3.1. Modification de l'année de dernière observation

Tableau 5 : Modification de l'année de dernière observation

	$t_0 \rightarrow$	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
ExGF0	2000	91,81	91,68	91,45	91,19	91,15	91,04	91,01
	2025	94,22	94,08	93,82	93,52	93,47	93,37	93,34
	2050	95,89	95,75	95,46	95,13	95,08	94,96	94,93
ExGF65	2000	29,06	28,95	28,73	28,47	28,42	28,32	28,30
	2025	30,69	30,57	30,32	30,02	29,96	29,85	29,82
	2050	31,95	31,82	31,54	31,20	31,14	31,02	30,99
ExGF80	2000	15,05	14,95	14,74	14,49	14,44	14,34	14,33
	2025	16,26	16,15	15,90	15,61	15,56	15,45	15,43
	2050	17,27	17,15	16,88	16,55	16,48	16,36	16,34
ExGH0	2000	84,42	84,45	84,43	84,43	84,59	84,73	84,93
	2025	87,32	87,32	87,28	87,23	87,39	87,53	87,77
	2050	89,41	89,38	89,30	89,21	89,35	89,48	89,73
ExGH65	2000	23,20	23,26	23,25	23,22	23,33	23,43	23,62
	2025	24,96	24,99	24,93	24,86	24,96	25,05	25,25
	2050	26,42	26,41	26,31	26,18	26,26	26,33	26,54
ExGH80	2000	10,65	10,63	10,57	10,49	10,54	10,59	10,72
	2025	11,66	11,62	11,52	11,39	11,44	11,48	11,63
	2050	12,59	12,52	12,38	12,21	12,25	12,27	12,44

Ce tableau montre donc comment, en ajoutant chaque fois une année supplémentaire d'observations entre 2001 et 2007, le résultat en termes d'espérance de vie générationnelle à la naissance peut varier.

On constate clairement une différence de comportement entre les quotients de mortalité des hommes et ceux des femmes sur la fin de la période observée : si l'espérance de vie générationnelle des hommes change très peu en ajoutant les observations entre 2002 et 2007 (diminution de 0,14 année), celle des femmes y est nettement plus sensible : on obtient, de manière a priori étonnante, une diminution de près d'une année en ajoutant les observations entre 2002 et 2007. On verra plus bas comment s'explique cette diminution.

On observe également que la diminution d'espérance de vie se concentre presque exclusivement sur les grands âges.

3.2. Modification du dernier âge estimé (x_0)

Tableau 6 : Modification du dernier âge estimé

$x_0 \rightarrow$		89	91	93	95	97	99
ExGF0	2000	92,71	92,20	91,74	91,32	91,01	90,96
	2025	95,89	95,14	94,46	93,83	93,34	93,26
	2050	98,36	97,38	96,47	95,61	94,93	94,82
ExGF65	2000	30,08	29,55	29,07	28,63	28,30	28,24
	2025	32,45	31,68	30,97	30,33	29,82	29,74
	2050	34,48	33,48	32,55	31,68	30,99	30,88
ExGF80	2000	16,21	15,64	15,14	14,68	14,33	14,27
	2025	18,13	17,34	16,61	15,95	15,43	15,34
	2050	19,89	18,87	17,93	17,04	16,34	16,23
ExGH0	2000	85,52	85,36	85,14	85,01	84,93	84,92
	2025	88,73	88,48	88,12	87,90	87,77	87,75
	2050	91,12	90,78	90,26	89,92	89,73	89,70
ExGH65	2000	24,26	24,08	23,85	23,70	23,62	23,61
	2025	26,26	26,00	25,62	25,39	25,25	25,23
	2050	27,98	27,63	27,08	26,74	26,54	26,51
ExGH80	2000	11,46	11,25	10,98	10,82	10,72	10,71
	2025	12,74	12,45	12,04	11,78	11,63	11,61
	2050	13,97	13,59	13,02	12,65	12,44	12,41

Le tableau qui précède montre que le choix l'âge x_0 , dernier âge estimé, peut avoir un impact très important en termes d'espérances de vie générationnelles.

Les deux mêmes constats que pour le paramètre t_0 peuvent être faits, mais avec une ampleur nettement plus grande : une différence de 3,5 années pour les femmes (1,5 année pour les hom-

mes) apparaît dans l'espérance de vie générationnelle en 2050 selon que l'on choisisse 89 ans ou 99 ans comme dernier âge estimé. Et cette différence se concentre dans les grands âges.

Au demeurant, plus rien ne justifie de choisir un dernier âge estimé inférieur à 97 ans car le nombre d'observations est largement suffisant à cet âge et même au-delà.

L'explication de cette sensibilité des espérances de vie générationnelle à t_0 et de x_0 est le ralentissement en fin de période de la décroissance des quotients de mortalité aux grands âges, voire la croissance des quotients, (cf. 1.6). Plus l'estimation prend en compte les âges élevés (x_0) et les données récentes (t_0), plus le ralentissement de la décroissance ou la croissance des q_x va se faire sentir, et tout particulièrement dans les grands âges.

3.3. Modification de l'âge limite

Tableau 7 : Modification de l'âge limite

	$\tilde{x}_{t_0} \rightarrow$	125	130	135	140	145	150
ExGF0	2000	91,00	91,01	91,01	91,01	91,01	91,01
	2025	93,34	93,34	93,34	93,35	93,35	93,35
	2050	94,93	94,93	94,94	94,94	94,94	94,94
ExGF65	2000	28,29	28,30	28,30	28,30	28,30	28,30
	2025	29,82	29,82	29,82	29,83	29,83	29,83
	2050	30,98	30,99	30,99	31,00	31,00	31,00
ExGF80	2000	14,32	14,33	14,33	14,33	14,33	14,33
	2025	15,42	15,43	15,43	15,43	15,43	15,43
	2050	16,33	16,34	16,34	16,35	16,35	16,35
ExGH0	2000	84,93	84,93	84,93	84,93	84,93	84,93
	2025	87,77	87,77	87,77	87,77	87,77	87,77
	2050	89,73	89,73	89,73	89,73	89,73	89,73
ExGH65	2000	23,62	23,62	23,62	23,62	23,62	23,62
	2025	25,24	25,25	25,25	25,25	25,25	25,25
	2050	26,53	26,54	26,54	26,54	26,54	26,54
ExGH80	2000	10,72	10,72	10,72	10,72	10,72	10,72
	2025	11,63	11,63	11,63	11,63	11,63	11,63
	2050	12,44	12,44	12,44	12,44	12,44	12,44

On constate que, même en fin de période, une augmentation de l'âge limite \tilde{x}_{t_0} n'a pratiquement pas d'effet en termes d'espérance de vie générationnelles.

4. Calcul des $q_{x,t}$ unisexes

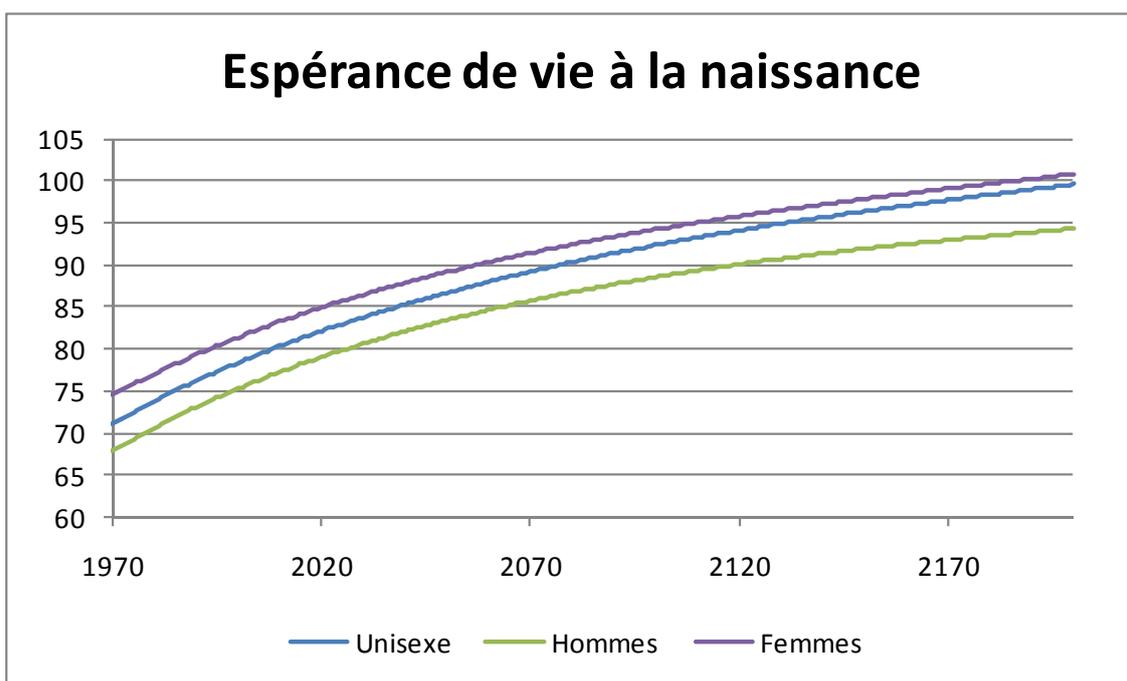
4.1. Méthode classique

La première méthode consiste à utiliser les données regroupées sans distinction de sexe et d'y appliquer la méthode classique pour chaque sexe séparément.

Les résultats sont apparemment satisfaisants sur le siècle mais on constate à long terme un rapprochement non acceptable des espérances de vie des femmes seules et des espérances de vie unisexes ! A très long terme, les espérances de vie unisexes peuvent même dépasser celles de femmes.

Cette aberration tient au fait que le modèle est estimé séparément pour chaque sexe et pour les données unisexes et que par conséquent il n'y a aucune garantie de cohérence entre les exercices.

Graphique 8 : Espérances de vie à la naissance à long terme méthode 1



4.2. Méthode proportionnelle

Pour pallier ce problème, on a décomposé le calcul des $q_{x,t}$ unisexes dans ses 2 composantes :

Soient :

- $q_{x,t}$ le quotient de mortalité à l'âge x pour l'année t .
- $q_{x,t}^H$ le quotient de mortalité des hommes à l'âge x pour l'année t .
- $q_{x,t}^F$ le quotient de mortalité des femmes à l'âge x pour l'année t .
- $P_{x,t}$ la population totale d'âge x au premier janvier de l'année t
- $P_{x,t}^H$ la population masculine d'âge x au premier janvier de l'année t
- $P_{x,t}^F$ la population féminine d'âge x au premier janvier de l'année t
- $D_{x,t}$ le nombre de décès à l'âge x dans le cours de l'année t
- $D_{x,t}^H$ le nombre de décès d'hommes à l'âge x dans le cours de l'année t
- $D_{x,t}^F$ le nombre de décès de femmes à l'âge x dans le cours de l'année t
- $k_{x,t}$ la proportion d'hommes dans la population totale à l'âge x à l'année t .

On a donc :

$$P_{x,t}^H = k_{x,t}P_{x,t} \quad (38)$$

et :

$$P_{x,t}^F = (1 - k_{x,t})P_{x,t} \quad (39)$$

Il s'en suit que :

$$q_{x,t} = \frac{D_{x,t}^H + D_{x,t}^F}{P_{x,t}} = \frac{D_{x,t}^H}{P_{x,t}} + \frac{D_{x,t}^F}{P_{x,t}} = \frac{D_{x,t}^H}{P_{x,t}^H} k_{x,t} + \frac{D_{x,t}^F}{P_{x,t}^F} (1 - k_{x,t}) \quad (40)$$

Et donc :

$$q_{x,t} = k_{x,t} q_{x,t}^H + (1 - k_{x,t}) q_{x,t}^F \quad (41)$$

Par conséquent, si on dispose des quotients de mortalité par sexe, il suffit d'avoir la proportion d'hommes dans la population pour chaque année et chaque âge pour pouvoir déduire par simple calcul la valeur des quotients de mortalité unisexes.

4.3. Calcul de la répartition de la population par sexe

La valeur de $k_{x,t}$ est obtenue par le calcul suivant :

$$k_{x,t} = \frac{P_{x,t}^H}{P_{x,t}^H + P_{x,t}^F} \quad (42)$$

Pour obtenir une série de $k_{x,t}$ il est donc nécessaire de connaître la population par âge de chaque sexe pour toutes les années étudiées.

Seule nous intéresse pour cet exercice la *proportion* d'hommes et de femmes dans la population par âge et par année. On va donc procéder de façon récurrente en partant d'un individu en t_0 et en lui appliquant les quotients de mortalité prospectifs calculés année après année.

Pour obtenir des espérances de vie générationnelles à partir de 1970 pour des individus pouvant atteindre théoriquement 130 ans, il serait nécessaire de reconstruire des séries de quotients de mortalité jusqu'à l'année $1970 - 130$, soit 1840. Or, le modèle estimé ne permet pas de remonter si loin dans le temps : les valeurs calculées des quotients de mortalité dépasseraient la valeur 1 en raison de la forme exponentielle du modèle.

Pour pallier ce problème, on construit une *pseudo-population en 1970* en appliquant les quotients de mortalité de 1970 à chaque âge. Sous forme mathématique, ce calcul s'effectue alors comme suit pour les hommes :

$$P_{0,t}^H = 1, \forall t \geq t_0 \quad (43)$$

$$P_{x,t_0}^H = P_{x-1,t_0}^H (1 - q_{x-1,t_0}^H) \forall x \geq 1 \quad (44)$$

$$P_{x,t}^H = P_{x-1,t-1}^H (1 - q_{x-1,t-1}^H) \forall x \geq 1, \forall t \geq t_0 \quad (45)$$

On procède de la même façon pour les femmes et on obtient des pseudo-populations pour chaque sexe.

Pour prendre en compte la différence entre le nombre de naissances de garçons et de filles, on multiplie chaque pseudo-population obtenue par un facteur qui en rend compte : le *coefficient de masculinité à la naissance*, fixé ici à 51,24 % en faveur des garçons, soit la moyenne des observations des cinq dernières années observées.

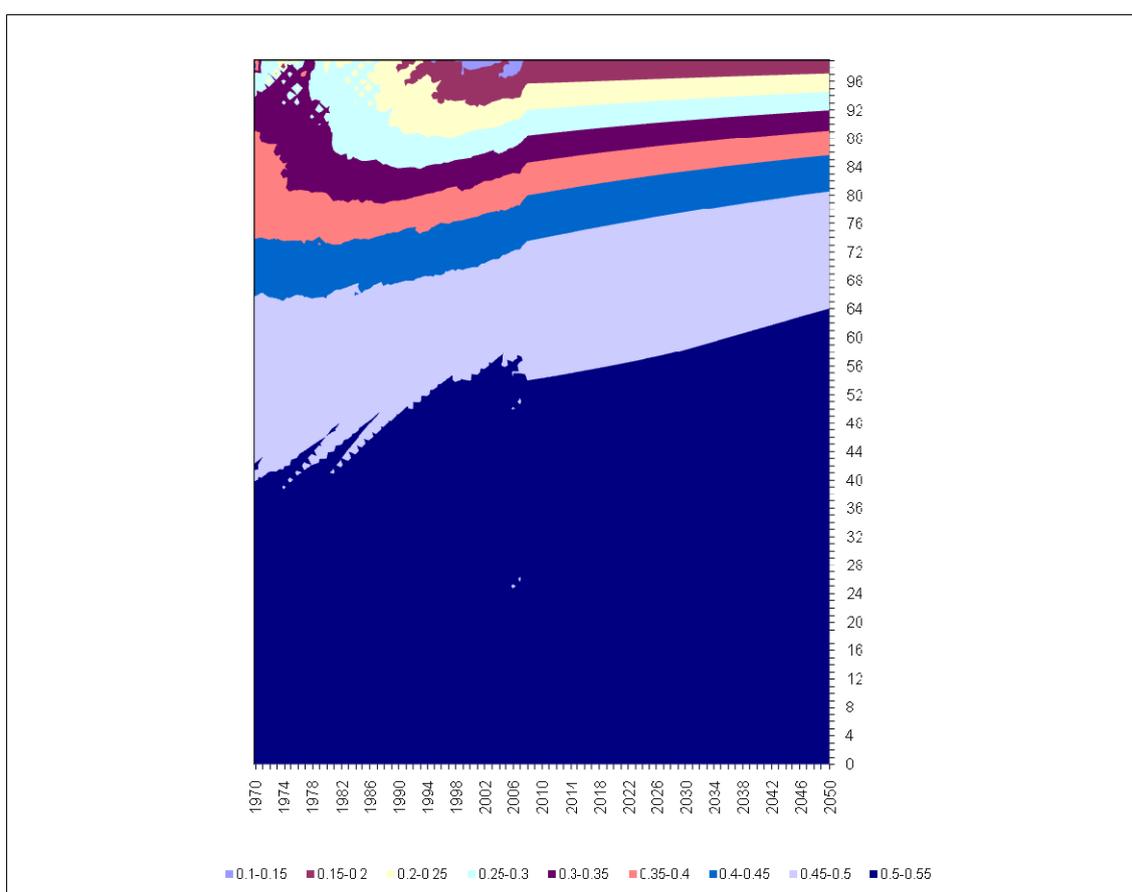
Finalement, on obtient la proportion d'hommes dans la population globale par une simple division.

4.4. Projection de la répartition de la population par sexe

Le graphique suivant montre la proportion d'hommes dans la population globale.

Jusqu'en 2007, il s'agit d'observations. A partir de 2008, les valeurs utilisées sont le résultat de la projection de la répartition homme – femmes dérivée des pseudo-populations calculées par la méthode décrite plus haut.

Graphique 9 : Répartition calculée Hommes/Femmes de 0 à 100 ans entre 1970 et 2060

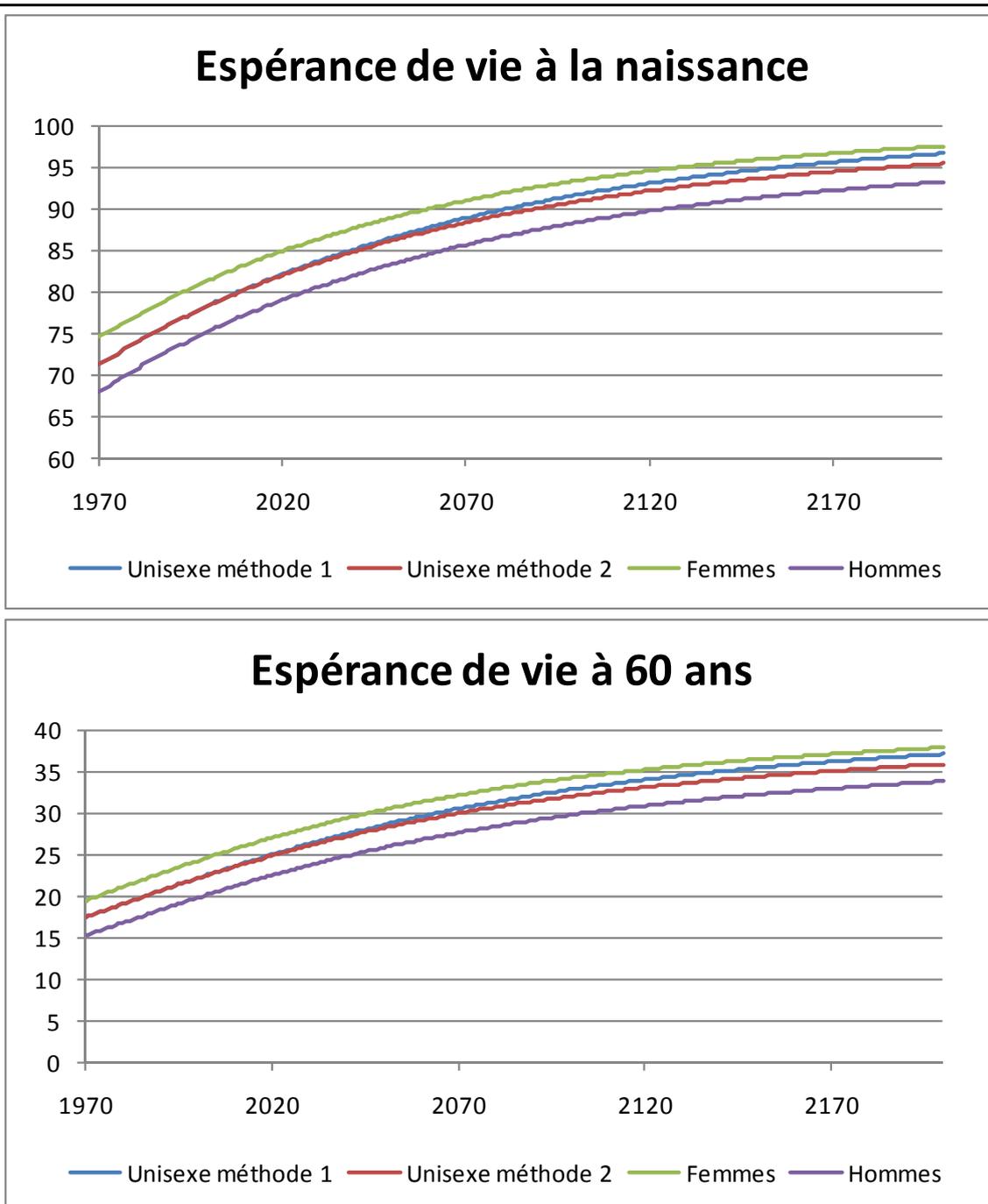


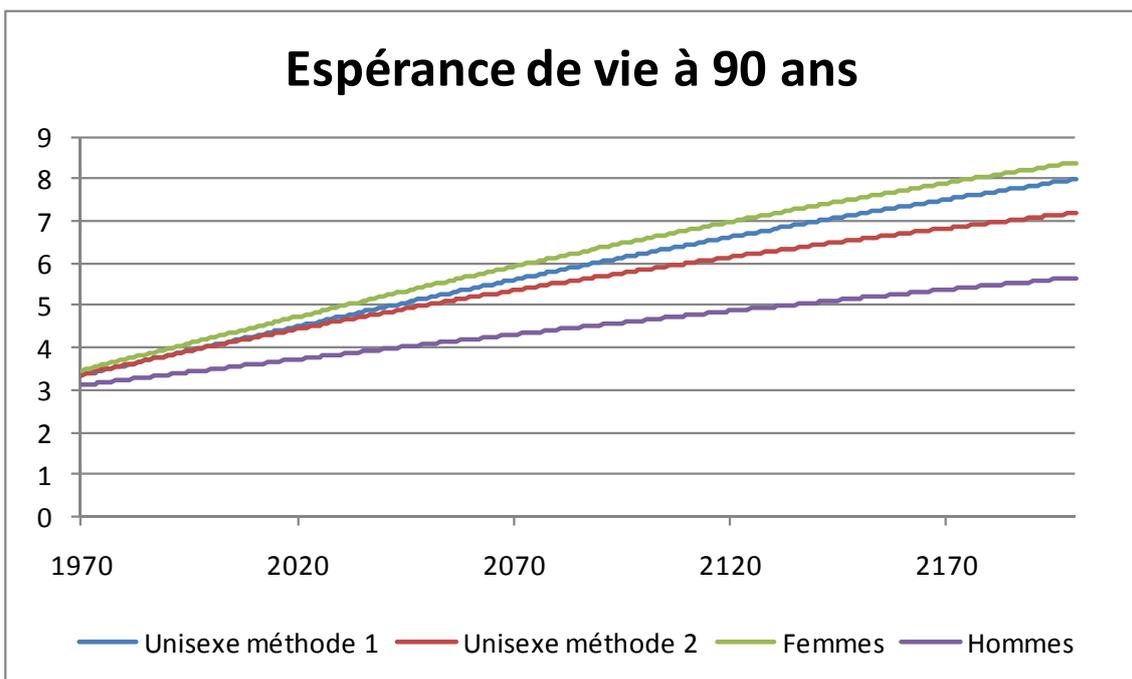
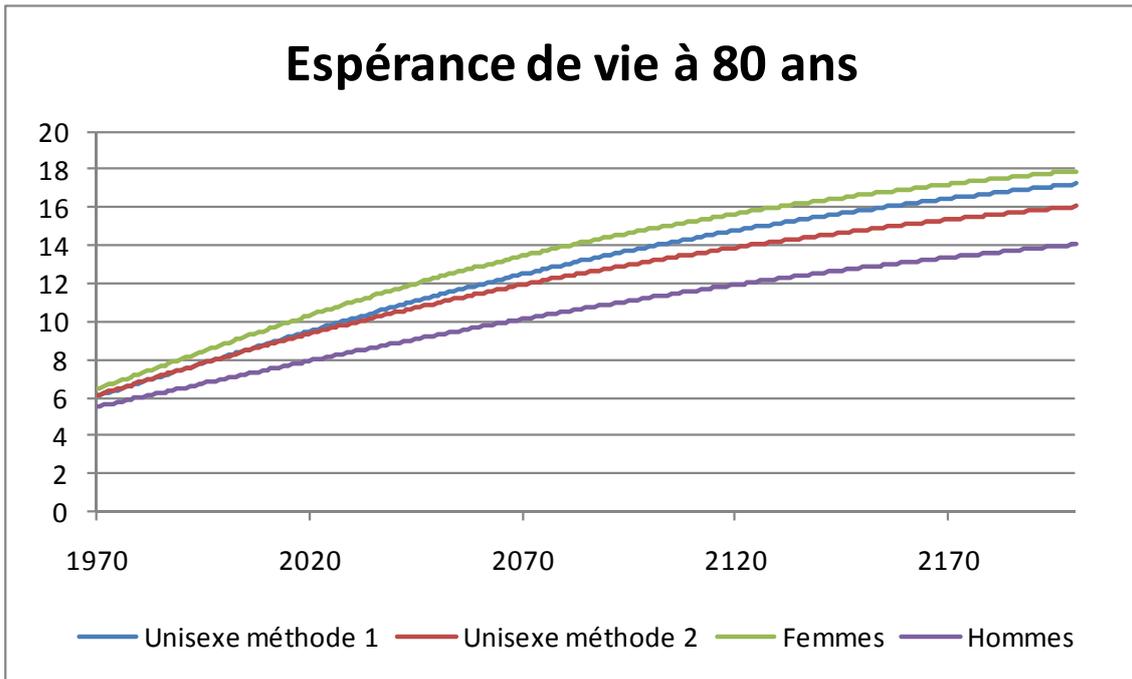
5. Résultats

5.1. Comparaison des espérances de vie unisexes selon les deux méthodes

Les graphiques suivants montrent que les espérances de vie unisexes à long terme restent bien centrées entre les courbes de chaque sexe dans la méthode proportionnelle, contrairement à la méthode classique.

Graphique 10 : Comparaison des espérances de vie unisexes selon les deux méthodes

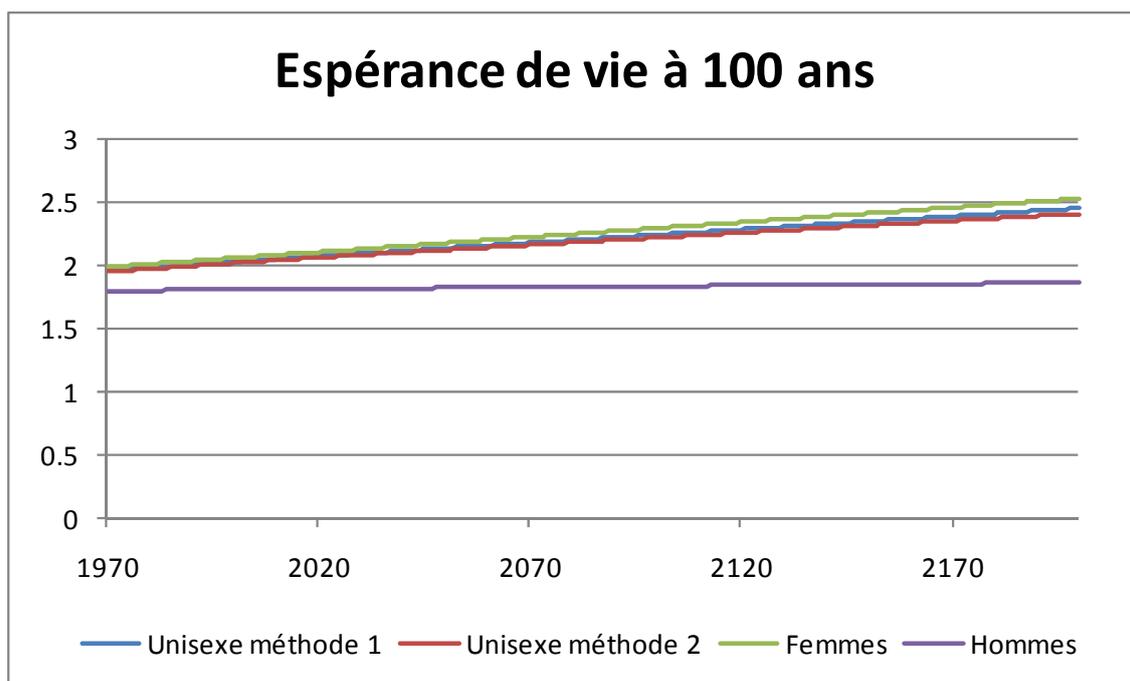




5.2. Comparaison des espérances de vie à partir de 100 ans selon les deux méthodes

A partir de 100 ans, la forme des courbes obtenues se rapproche évidemment de celle de femmes en raison de la prépondérance de la population féminine. Les deux courbes sont quasiment superposées.

Graphique 11 : Comparaison des espérances de vie à partir de 100 ans selon les deux méthodes



5.3. Comparaison des espérances de vie hommes, femmes et unisexes

Tableau 8 : Espérances de vie transversales à divers âges

	Hommes			Femmes			Unisexe		
	2000	2025	2050	2000	2025	2050	2000	2025	2050
0	75,29	79,83	83,36	81,39	85,64	88,91	78,36	82,76	86,16
65	16,03	18,93	21,37	19,97	23,15	25,73	18,15	21,16	23,64
80	6,97	8,16	9,29	8,81	10,67	12,31	8,12	9,63	10,98

Tableau 9 : Espérances de vie générationnelles à divers âges

	Hommes			Femmes			Unisexe		
	2000	2025	2050	2000	2025	2050	2000	2025	2050
0	84,93	87,77	89,73	91,01	93,34	94,93	87,94	90,54	92,32
65	23,62	25,25	26,54	28,30	29,82	30,99	25,99	27,56	28,79
80	10,72	11,63	12,44	14,33	15,43	16,34	12,64	13,62	14,45

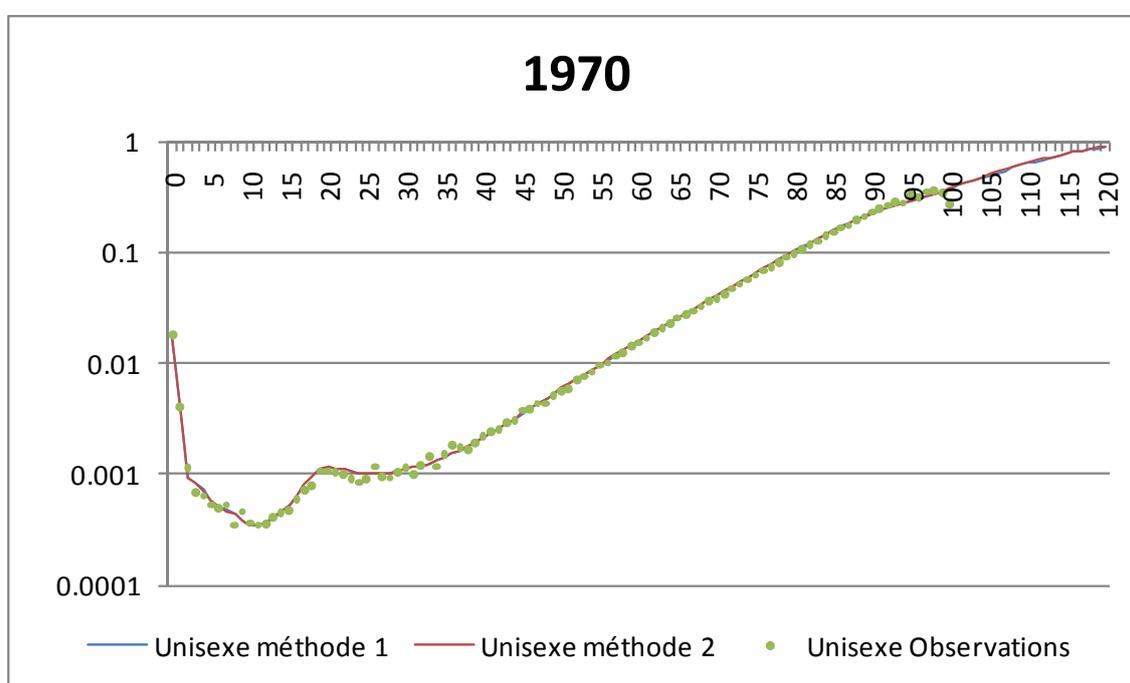
5.4. Quotients de mortalité unisexes par année selon les deux méthodes

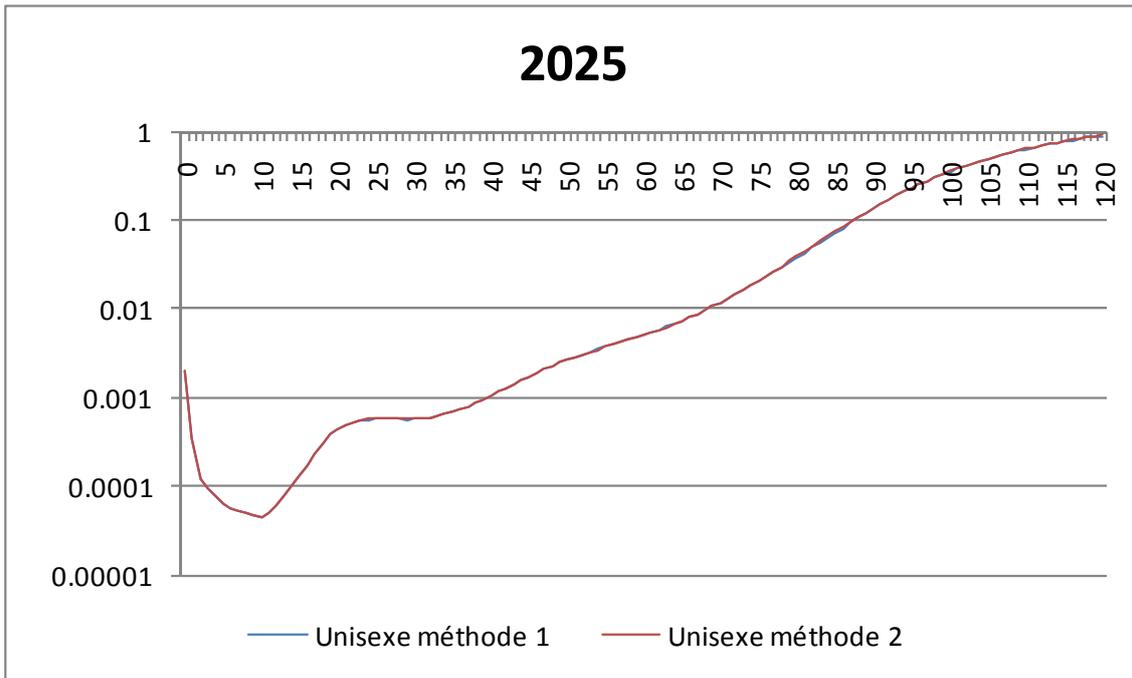
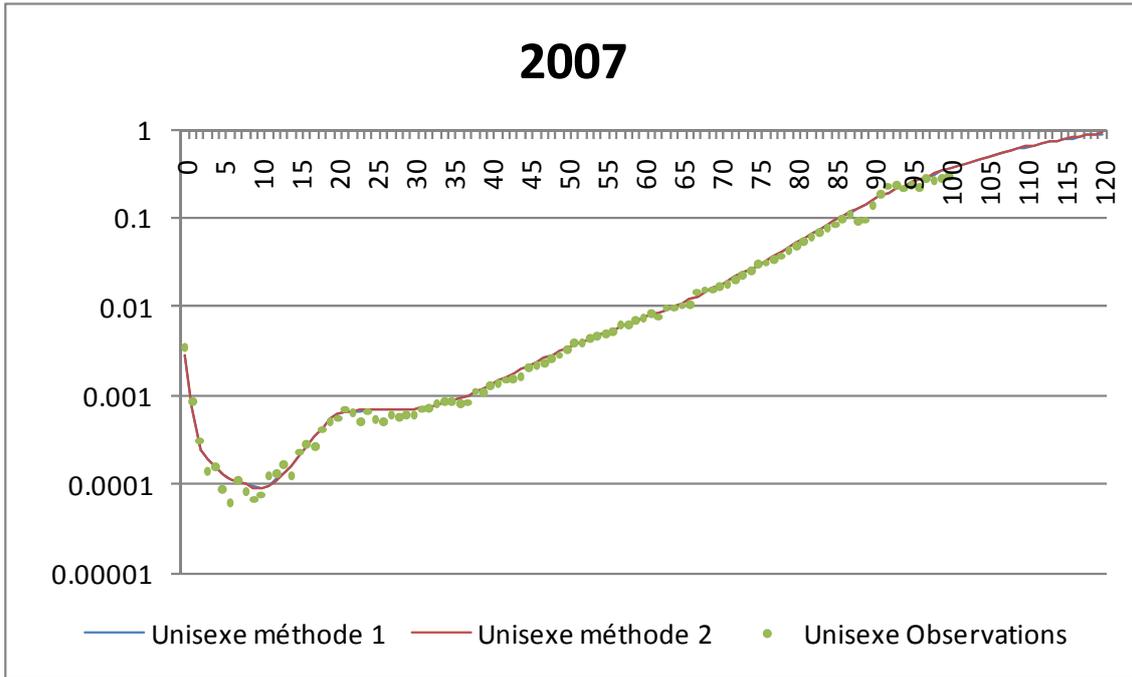
Les graphiques suivants présentent, pour quelques années de référence, les quotients de mortalité observés jusqu'en 2007 et ceux calculés par les deux méthodes.

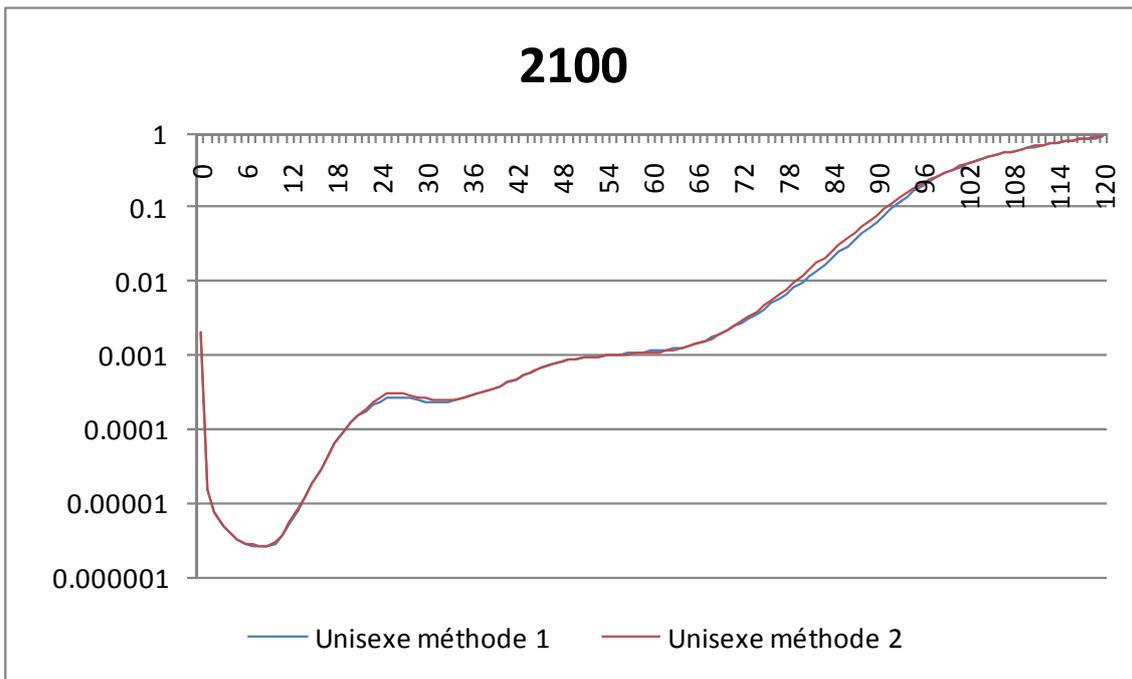
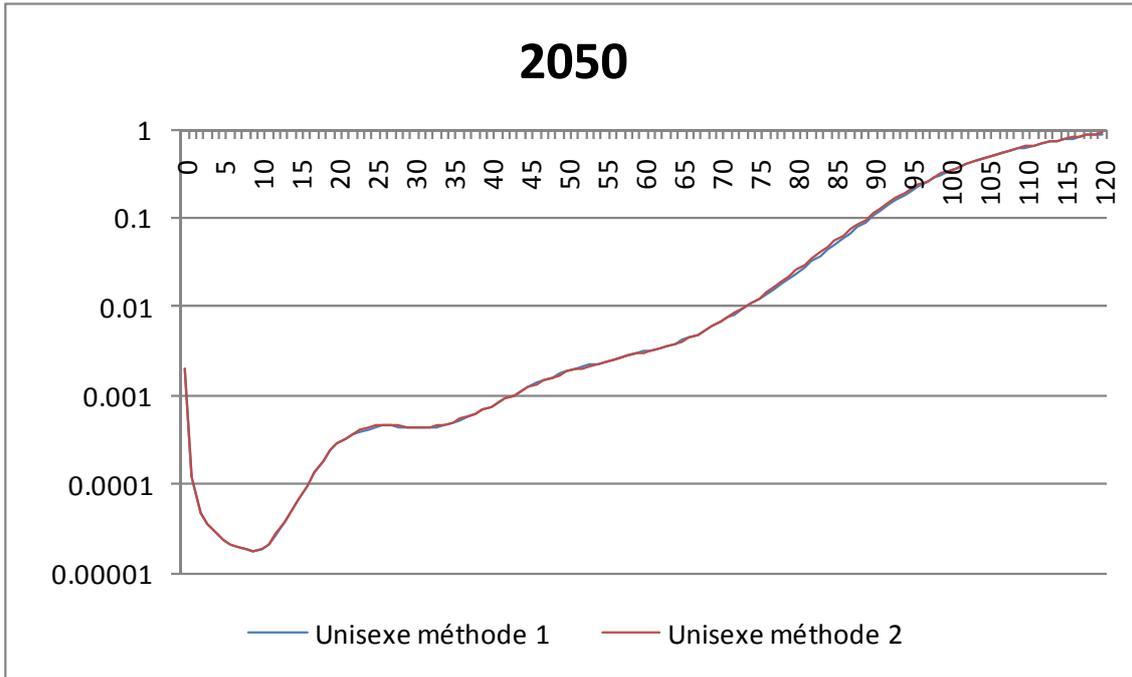
On constate :

- que les projections sur le passé collent bien aux observations
- que les deux méthodes restent très proches jusqu'en 2100
- qu'à partir 2050, une différence apparaît progressivement : les quotients obtenus par la méthode classique sont plus faibles entre 20 et 35 ans et au-delà de 75 ans

Graphique 12 : Quotients de mortalité unisexes par année selon les deux méthodes







5.5. Quotients de mortalité par âge selon la méthode proportionnelle

Les graphiques qui suivent présentent les quotients de mortalité de 1970 à 2060 pour quelques âges. On constate :

- que les courbes projetées sont proches des observations pour les âges auxquels les observations sont nombreuses (0 an, entre 60 et 95 ans)
- qu’une estimation est plus difficile aux autres âges. Les courbes sont parfois situées plutôt en-dessous (1 an, 20 ans), ou plutôt au-dessus (10 ans) des observations. Cela est dû à la méthode de calibrage des α_x , qui, après une première estimation des α_x et β_x , calibre les α_x sur les 10 dernières années observées.
- que les courbes non estimées (au-delà de 97 ans) restent bien en phase avec les observations.

Graphique 13 : Projection et observation des quotients unisexes à divers âges

